Lösningsförslag, TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 2014-06-09

1. Att punkten $P = (1, 2, 3)$ ligger närmast $O = (0, 0, 0)$ innebär att P:s ortsvektor $\overline{OP}$ är en normalvektor till Π, varför Π:s ekvation kan skrivas $x + 2y + 3z = D$, där D bestäms av att P ska uppfylla ekvationen. Detta ger $D = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$.

Svar: $x + 2y + 3z = 14$.

2. Låt S beteckna den punkt på ℓ som ligger närmast R. Det sökta avståndet är då

$$\begin{aligned}|\overline{SR}| &= |\overline{PR} - \overline{PS}| = |\overline{PR} - \overline{PR}_{\|\overline{PQ}}| \\ &= \left|(1, 2, 1)^t - \frac{(1, 2, 1)^t \bullet (-1, 1, 2)^t}{(-1, 1, 2)^t \bullet (-1, 1, 2)^t}(-1, 1, 2)^t\right| \\ &= \left|(1, 2, 1)^t - \frac{3}{6}(-1, 1, 2)^t)\right| = \frac{3}{2}|(1, 1, 0)^t| \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

längdenheter.

3. Vi kan exempelvis välja $\overline{f_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3})$. Eftersom $\overline{f_2}$ ska vara ortogonal mot såväl $\overline{f_1}$ som $\overline{e_3}$ måste $\overline{f_2}$ vara parallell med vektorn $(\overline{e_1}+\overline{e_2}+\overline{e_3})\times\overline{e_3} = \overline{e_1}-\overline{e_2}$, så $\overline{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{e_1}-\overline{e_2})$ duger. Som tredje och sista basvektor kan vi slutligen välja $\overline{f_3} = \overline{f_1}\times\overline{f_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\overline{e_1}+\overline{e_2}-2\overline{e_3})$.

4. Egenvärden och egenvektorer till högerledets koefficientmatris söks. Sekularekvationen blir $(4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = 0$ med lösningarna $\lambda = 2$ och $\lambda = 3$.

De tillhörande egenvektorerna visar sig vara $\overline{v}_2 = s(1\ 2)^t$ respektive $\overline{v}_3 = u(1\ 1)^t$ $(s, u \neq 0)$. Därför ges den allmänna lösningen av

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter. De givna begynnelsevillkoren motsvarar ekvationerna $C_1 + C_2 = 1$ respektive $2C_1 + C_2 = 0$, så att $C_1 = -1$ och $C_2 = 2$. Lösningen vi söker är alltså

$$\begin{cases} y_1(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}, \\ y_2(t) = -2e^{2t} + 2e^{3t}. \end{cases}$$

5. **(a)** Matrisen är inverterbar om och endast om dess determinant är nollskild. Determinanten är

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = a^2 - a$$

som är skilt från noll för alla värden på a utom 0 och 1.

(b) Ekvationssystemet har en unik lösning om och endast om koefficientmatrisen är inverterbar, vilket är fallet utom om $a = 0$ eller $a = 1$. Om $a = 0$ blir den nedersta ekvationen $0 = 1$, så systemet saknar lösningar i detta fall. Om $a = 1$ har systemet totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

och lösningarna $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(-1, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.
Svar: Systemet har oändligt många lösningar precis då $a = 1$. Dessa lösningar är $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(-1, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

6. Eftersom F är linjär kan det givna systemet skrivas

$$\begin{cases} F(\overline{e_1}) - F(\overline{e_2}) & = \quad 4\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - 2\overline{e_3}, \\ F(\overline{e_1}) + F(\overline{e_2}) & = \ -2\overline{e_1} + 2\overline{e_2}, \\ F(\overline{e_1}) + F(\overline{e_2}) + F(\overline{e_3}) & = \ -2\overline{e_1} + 6\overline{e_2} - 2\overline{e_3}. \end{cases}$$

Vi vill bestämma $F(\overline{e_1})$, $F(\overline{e_2})$ och $F(\overline{e_3})$, så vi löser systemet, förslagsvis genom att eliminera i totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 6 & -2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right),$$

så de sökta vektorerna är $F(\overline{e_1}) = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} - \overline{e_3}$, $F(\overline{e_2}) = -3\overline{e_1} + \overline{e_3}$ och $F(\overline{e_3}) = 4\overline{e_2} - 2\overline{e_3}$. Koordinatmatriserna för dessa vektorer är kolonnerna i avbildningsmatrisen, som alltså är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Antagandet $(I-A)^{-1} = I+A+A^2$ innebär att $(I-A)(I+A+A^2) = I$. Å andra sidan har vi

$$(I - A)(I + A + A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I - A^3,$$

så $I = I - A^3$, vilket betyder att $A^3 = 0$ (nollmatrisen). Om A^{-1} existerade kunde vi multiplicera denna identitet med $(A^{-1})^3 = A^{-3}$ och få $A^{-3} \cdot A^3 = A^{-3} \cdot 0$, det vill säga $I = 0$, vilket är en omöjlighet. Alltså existerar inte A^{-1}. $\square$