Lösningsförslag, TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 2014-03-17

1. Om vi betecknar första linjens parameter med s och den andras med t, uppfyller P ekvationerna

$$\begin{cases} 1-2s &= 3+t, \\ \phantom{-3+{}}3 &= -1+t, \\ -3+s &= 2-2t, \end{cases}$$

som har lösningen $s=-3$, $t=4$, vilken motsvarar den gemensamma punkten $P=(7,3,-6)$.

Den nya linjens riktningsvektor $\overline{v}$ ska vara ortogonal mot de givna linjernas dito, så vi kan välja kryssprodukten

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Linjens ekvation kan därmed skrivas $(x,y,z)=(7,3,-6)+t(1,3,2)$.

2. Systemet har en unik lösning om och endast om determinanten för koefficientmatrisen är nollskild. Determinanten är

$$\det \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & a \end{pmatrix} = 2a+a^2,$$

vilket är nollskilt utom om $a=0$ eller $a=-2$. Om $a=0$ försvinner sista ekvationen och allt som återstår är ekvationen $2x=3$, vilket ger de oändligt många lösningarna $(x,y)=(3/2,t)$, $t\in\mathbb{R}$. Om istället $a=-2$ har båda ekvationerna samma vänsterled men olika högerled, så systemet är olösligt.

Alltså har systemet oändligt många lösningar om $a=0$, ingen lösning om $a=-2$ och exakt en lösning för alla andra a.

3. Vi beräknar $\det A = 2 \neq 0$ och $\det B = -1 \neq 0$, så A och B är inverterbara. Om ekvationen multipliceras från vänster med A^{-1} och från höger med B^{-1} fås

$$\begin{aligned} X &= CB^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & 4 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. En normalvektor till Π är $\overline{n} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$. Avbildningen ges av formeln $F(\overline{v}) = \overline{v} - v_{\|\overline{n}}$, där $v_{\|\overline{n}}$ betecknar $\overline{v}$:s ortogonala projektion på $\overline{n}$. Med projektionsformeln beräknas $F(\overline{e_1}) = \frac{1}{6}(5\overline{e_1} - \overline{e_2} - 2\overline{e_3})$, $F(\overline{e_2}) = \frac{1}{6}(-\overline{e_1} + 5\overline{e_2} - 2\overline{e_3})$ och $F(\overline{e_3}) = \frac{1}{6}(-2\overline{e_1} - 2\overline{e_2} + 2\overline{e_3})$. Dessa vektorers respektive koordinater utgör kolonnerna i den sökta avbildningsmatrisen A som alltså är

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen är symmetrisk, så rummet har en ON-bas bestående av egenvektorer till A. Eftersom det finns en bas av egenvektorer till A, är A diagonaliserbar.

5. (a) Elimination i systemets totalmatris ger (exempelvis)

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -28 \end{array}\right).$$

Nedersta raden motsvarar $0 = -28$, så systemet är olösligt.

(b) Normalekvationen blir

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix},$$

vars enda lösning är $x_1 = 4$, $x_2 = -1/2$.

(c) Deluppgift (b) visar att närmaste punkten har parametrarna $s = 4$, $t = -1/2$, så den är $4(1, 1, 1) - (4, 2, -2)/2 = (2, 3, 5)$.

6. Vi söker egenvärden och egenvektorer till högerledets koefficientmatris. Sekularekvationen blir, efter förenkling, $-\lambda^3 + 27\lambda - 54 = 0$ med lösningarna $\lambda = 3$ (dubbelrot) respektive $\lambda = -6$.

De tillhörande egenvektorerna visar sig vara $\overline{v}_3 = s(-1\ 2\ 0)^T + t(1\ 0\ 1)^T$ respektive $\overline{v}_{-6} = u(2\ 1\ -2)^T$ $((s, t) \neq (0, 0),\ u \neq 0)$. Därför ges den allmänna lösningen av

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \left(C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-6t},$$

där C_1, C_2 och C_3 är godtyckliga konstanter.

7. Observera att $\overline{f_1}$ är parallell med linjen medan $\overline{f_2}$ och $\overline{f_3}$ är ortogonala mot densamma. Därför fås spegelbilderna $G(\overline{f_1}) = \overline{f_1}$, $G(\overline{f_2}) = -\overline{f_2}$ och $G(\overline{f_3}) = -\overline{f_3}$, så avbildningsmatrisen i basen $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$, $\overline{f_3}$ är

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Transformationsmatrisen för basbytet är

$$T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

som är en ON-matris, så dess invers är lika med dess transponat. Avbildningsmatrisen i basen $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ fås nu enligt

$$\begin{aligned}
A_e &= TA_fT^{-1} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Inspektion av första kolonnen i respektive avbildningsmatris ger

$$\begin{aligned}
G(\overline{e_1} + \overline{f_1}) = G(\overline{e_1}) + G(\overline{f_1}) &= \\
&= \frac{1}{9}(-\overline{e_1} + 4\overline{e_2} - 8\overline{e_3}) + \overline{f_1} \\
&= \frac{1}{9}(-\overline{e_1} + 4\overline{e_2} - 8\overline{e_3} + 6\overline{e_1} + 3\overline{e_2} - 6\overline{e_3}) \\
&= \frac{1}{9}(5\overline{e_1} + 7\overline{e_2} - 14\overline{e_3}),
\end{aligned}$$

så koordinatmatrisen i ursprungsbasen är

$$G(\overline{e_1} + \overline{f_1})_e = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix}.$$