Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Axel Hultman

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 6hp, 2014-03-17

Skrivtid 14–19. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd tre poäng. Betygsgränser: 8 poäng ger betyg 3, 12 poäng ger betyg 4 och 15 poäng ger betyg 5. Tid för tentamensvisning meddelas via kurshemsidan.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ för rummet.

1. Två linjer har ekvationerna $(x, y, z) = (1, 3, -3) + t(-2, 0, 1)$ respektive $(x, y, z) = (3, -1, 2) + t(1, 1, -2)$. Linjerna har en gemensam punkt, P. Bestäm P. Finn sedan en ekvation, på parameterform, för en linje som innehåller P och är ortogonal mot båda de givna linjerna.

2. Bestäm, för varje reellt värde på konstanten a, antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x & + \ ay & = & 3, \\ -ax & + \ ay & = & a. \end{cases}$$

3. Avgör om A och B är inverterbara. Finn sedan en matris X sådan att $AXB = AC$, där

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Planet Π har ekvationen $x + y + 2z = 0$. Den linjära avbildningen F på rummet ges av ortogonal projektion på Π. Bestäm F:s avbildningsmatris. Avgör också om denna matris är diagonaliserbar.

Var god vänd!

5. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & + & 4x_2 & = & -2, \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 9, \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 3. \end{cases}$$

(a) Visa att systemet saknar lösning.

(b) Bestäm systemets minstakvadratlösning.

(c) Planet Π har ekvationen $(x, y, z) = s(1, 1, 1) + t(4, 2, -2)$. Vilken punkt på Π ligger närmast $(-2, 9, 3)$?

6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) & = & -y_1(t) & - & 2y_2(t) & + 4y_3(t), \\ y_2'(t) & = & -2y_1(t) & + & 2y_2(t) & + 2y_3(t), \\ y_3'(t) & = & 4y_1(t) & + & 2y_2(t) & - \ \ y_3(t). \end{cases}$$

7. Den linjära avbildningen G på rummet ges av spegling i linjen som har ekvationen $(x, y, z) = t(2, 1, -2)$.

Inför en ny ON-bas $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ för rummet enligt $\overline{f_1} = \frac{1}{3}(2\overline{e_1} + \overline{e_2} - 2\overline{e_3})$, $\overline{f_2} = \frac{1}{3}(\overline{e_1} + 2\overline{e_2} + 2\overline{e_3})$ och $\overline{f_3} = \frac{1}{3}(2\overline{e_1} - 2\overline{e_2} + \overline{e_3})$.

Bestäm G:s avbildningsmatriser i båda baserna. Beräkna också koordinaterna för vektorn $G(\overline{e_1} + \overline{f_1})$ i ursprungsbasen $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$.