Lösningsförslag, TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 2013-08-23

1. Tre vektorer i rummet är linjärt beroende om och endast om matrisen som har deras respektive koordinater som kolonner (eller rader) har determinant noll. Med hjälp av exempelvis Sarrus beräknas denna determinant som visar sig vara $-5 \neq 0$, så vektorerna är linjärt oberoende.

Alternativt demonstreras att ekvationen $a\overline{u} + b\overline{v} + c\overline{w} = \overline{0}$ endast har den triviala lösningen $a = b = c = 0$.

2. Adderas andra och fjärde ekvationen fås $2x = 0$. Första ekvationen ger då $y = 4$ medan den andra ger $y = 0$, så systemet saknar lösning.

Normalekvationen blir

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

vars enda lösning är $x = y = 8/9$.

3. Linjen ℓ har riktningsvektorn $\overline{r} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$. Vektorn $\overline{w}$ ges av $\overline{u}$:s ortogonala projektion på riktningsvektorn: $\overline{w} = \overline{u}_{\|\overline{r}} = -2\overline{e_1} - 2\overline{e_2} - 4\overline{e_3}$. Vi får då $\overline{v} = \overline{u} - \overline{w} = 6\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - 4\overline{e_3}$.

4. Ekvationen kan skrivas $X(A - E) = B$, där E betecknar identitetsmatrisen. Under förutsättning att $A - E$ är inverterbar (vilket vi bevisar genom att bestämma inversen eftersom vi ändå behöver den nedan), får vi

$$X = B(A-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Vi söker egenvärden och egenvektorer till A. Sekularekvationen blir efter förenkling $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$, så egenvärdena är 0, 1 och 4. De tillhörande egenvektorerna är $\overline{v_0} = s(1\ \ 0\ \ {-1})^T$, $\overline{v_1} = t(0\ \ 1\ \ 0)^T$ och $\overline{v_4} = u(1\ \ 1\ \ 1)^T$ $(s, t, u \neq 0)$. Vi kan därför välja

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Skärningspunkten är lösningen till ekvationssystemet som utgörs av de tre första planens ekvationer. Denna lösning är $Q = (2, 5, -2)$.

Välj någon punkt på Π_4; tag till exempel $P = (0, 8, 0)$. En normalvektor till Π_4 är $\overline{n} = \overline{e_1} - \overline{e_2} - 2\overline{e_3}$. En vektor med sökt längd ges därför av projektionen $\overline{PQ}_{\parallel \overline{n}} = \frac{(2,-3,-2)\cdot(1,-1,-2)}{6}\overline{n} = \frac{3}{2}\overline{n}$. Längden är således $\frac{3}{2}|\overline{n}| = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ längdenheter.

7. Eftersom den nya basen är en ON-bas blir basbytesmatrisen T en ortogonalmatris, så dess invers är lika med dess transponat. Om vi betecknar F:s avbildningsmatriser i den nya och den gamla basen med A_f respektive A_e, ges den sökta matrisen av

$$
\begin{aligned}
A_e &= T A_f T^{-1} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & 7 & 10 \\ -7 & -2 & 10 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$