Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Axel Hultman

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 6hp, 2013-08-23

Skrivtid 8–13. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd tre poäng. Betygsgränser: 8 poäng ger betyg 3, 12 poäng ger betyg 4 och 15 poäng ger betyg 5. Tid för tentamensvisning meddelas via kurshemsidan.

Alla koordinater nedan är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

1. Låt $\overline{u} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$, $\overline{v} = \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$ och $\overline{w} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + \overline{e_3}$. Avgör om vektorerna $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{w}$ är linjärt beroende.

2. Visa att nedanstående ekvationssystem är olösligt. Bestäm sedan dess minstakvadratlösning.

$$\begin{cases} 3x + y = 4, \\ x - y = 0, \\ x + 3y = 4, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

3. Linjen ℓ har ekvationen $(x, y, z) = (0, 1, 3) + t(1, 1, 2)$. Man kan skriva vektorn $\overline{u} = 4\overline{e_1} - 8\overline{e_3}$ som en summa $\overline{u} = \overline{v} + \overline{w}$, där $\overline{v}$ är ortogonal mot ℓ och $\overline{w}$ är parallell med ℓ. Bestäm $\overline{v}$ och $\overline{w}$.

4. Lös matrisekvationen $XA = X + B$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

5. Finn en matris T och en diagonalmatris D så att $A = TDT^{-1}$, där

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. De fyra planen Π_1, Π_2, Π_3 och Π_4 är givna av följande ekvationer:

$$\begin{aligned} \Pi_1 :&\quad x + 2y + 3z = 6, \\ \Pi_2 :&\quad 2x - y + z = -3, \\ \Pi_3 :&\quad 4x + 3z = 2, \\ \Pi_4 :&\quad x - y - 2z = -8. \end{aligned}$$

Planen Π_1, Π_2 och Π_3 skär varandra i en punkt. Bestäm det kortaste avståndet från denna punkt till planet Π_4.

7. Inför en ny ON-bas $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ för rummet enligt $\overline{f_1} = \frac{1}{3}(2\overline{e_1} + \overline{e_2} - 2\overline{e_3})$, $\overline{f_2} = \frac{1}{3}(\overline{e_1} + 2\overline{e_2} + 2\overline{e_3})$ och $\overline{f_3} = \frac{1}{3}(2\overline{e_1} - 2\overline{e_2} + \overline{e_3})$.

För en linjär avbildning F på rummet gäller det att $F(\overline{f_1}) = \overline{f_1} - \overline{f_2}$, $F(\overline{f_2}) = \overline{f_2} - \overline{f_3}$ och $F(\overline{f_3}) = \overline{0}$. Bestäm F:s avbildningsmatris i basen $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.