Lösningsförslag, TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 2013-06-03

1. Med hjälp av exempelvis Sarrus beräknas $\det A = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$ som är noll om och endast om $x = 0$ eller $x = 1$. Således är A inverterbar för alla värden på x utom noll och ett.

2. Ekvationen kan skrivas $(A + B - 2E)X = 2AB$, där E betecknar identitetsmatrisen. Under förutsättning att $(A+B-2E)$ är inverterbar (vilket vi bevisar genom att bestämma inversen eftersom vi ändå behöver den nedan), får vi

$$
\begin{aligned}
X = 2(A+B-2E)^{-1}AB &= 2\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -11 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{8}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -11 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

3. En normalvektor till Π ges av $\overline{n} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2} - 3\overline{e_3}$. Med projektionsformeln bestäms $\overline{v} = \overline{u}_{\|\overline{n}} = 2\overline{n} = 4\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - 6\overline{e_3}$. Vi får då $\overline{w} = \overline{u} - \overline{v} = 3\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$.

4. Vi söker egenvärden och egenvektorer till koefficientmatrisen. Sekularekvationen blir efter förenkling $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, så egenvärdena är 1 och 5. De tillhörande egenvektorerna visar sig vara $\overline{v_1} = s(1 \quad -1)^T$ och $\overline{v_5} = t(1 \;\; 3)^T$ $(s, t \neq 0)$. Systemets allmänna lösning är därför

$$
\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{5t}.
$$

Initialvillkoren säger $C_1 + C_2 = 1$ respektive $-C_1 + 3C_2 = 1$, vilket ger $C_1 = C_2 = 1/2$, så svaret är

$$
\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{5t}.
$$

5. Basbytesmatrisen och dess invers är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den sökta matrisen A_f beräknas enligt

$$A_f = T^{-1} A_e T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inspektion av första kolonnen ger $F(\overline{f_1}) = 2\overline{f_1} + \overline{f_2} = 3\overline{e_1} + 5\overline{e_2} + 2\overline{e_3}$.

6. Skärningspunkterna för varje par av linjer beräknas på standardmässigt sätt; se kursboken. Vi får att ℓ_1 skär ℓ_2 i $O = (0,0,0)$, ℓ_1 skär ℓ_3 i $P = (6,0,6)$ och att ℓ_2 skär ℓ_3 i $Q = (-6,6,0)$, så O, P och Q är triangelns hörnpunkter. Arean på parallellogrammet som spänns upp av $\overline{OP}$ och $\overline{OQ}$ ges av $|\overline{OP} \times \overline{OQ}| = |(-36,-36,36)| = 36\sqrt{3}$. Triangeln har halva denna area, vilket är $18\sqrt{3}$ areaenheter.

7. Att $x = 0$, $y = 1$ är minstakvadratlösningen innebär att

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

vilket är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2B_1 + B_2 + B_3 = 3, \\ B_1 - B_2 + 2B_3 = 6. \end{cases}$$

Detta system har lösningarna $(B_1, B_2, B_3) = (3, -3, 0) + t(-1, 1, 1)$, så punkterna bildar en rät linje med denna ekvation.