Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Axel Hultman

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 6hp, 2013-06-03

Skrivtid 14–19. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd tre poäng. Betygsgränser: 8 poäng ger betyg 3, 12 poäng ger betyg 4 och 15 poäng ger betyg 5. Tid för tentamensvisning meddelas via kurshemsidan.

Alla koordinater nedan är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

1. För vilka värden på det reella talet x är matrisen A inverterbar?

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

2. Lös matrisekvationen $AX + BX = 2(AB + X)$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Planet Π har ekvationen $2x + y - 3z = 0$. Vektorn $\overline{u} = 7\overline{e_1} + 5\overline{e_2} - 3\overline{e_3}$ kan skrivas som en summa $\overline{u} = \overline{v} + \overline{w}$, där $\overline{v}$ är ortogonal mot Π och $\overline{w}$ är parallell med Π. Bestäm $\overline{v}$ och $\overline{w}$.

4. Bestäm den lösning till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) = 3y_1(t) + 4y_2(t) \end{cases}$$

som uppfyller $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

Var god vänd!

5. En linjär avbildning F på rummet har i basen $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ avbildningsmatrisen

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inför en ny bas $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ för rummet genom att låta $\overline{f_1} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2}$, $\overline{f_2} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$ och $\overline{f_3} = \overline{e_2} - 3\overline{e_3}$. Bestäm F:s avbildningsmatris i den nya basen. Ange också koordinaterna för vektorn $F(\overline{f_1})$ i båda baserna.

6. De tre linjerna $\ell_1 : (x, y, z) = t(1, 0, 1)$, $\ell_2 : (x, y, z) = t(-1, 1, 0)$ och $\ell_3 : (x, y, z) = (2, 2, 4) + t(-2, 1, -1)$ avgränsar en triangel. Bestäm triangelns hörnpunkter och dess area.

7. För varje punkt $B = (B_1, B_2, B_3)$ i rummet finns det en unik minstakvadratlösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y = B_1, \\ x - y = B_2, \\ x + 2y = B_3. \end{cases}$$

Visa att de punkter B för vilka minstakvadratlösningen är $x = 0, y = 1$ bildar en rät linje. Ange denna linjes ekvation på parameterform.