# Lösningsförslag, TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 2013-03-11

**1.** En vektor som är ortogonal mot de givna ges av kryssprodukten (vektorprodukten) $(2,4,-2) \times (2,1,-1) = (-2,-2,-6)$. Vår sökta vektor är parallell med denna, så den kan skrivas $t(1,1,3)$ för lämpligt $t$. Längden ska vara 2, så vi har $|t(1,1,3)| = |t| \cdot \sqrt{11} = 2$ med lösningarna $t = \pm 2/\sqrt{11}$. Alltså duger vektorn $\frac{2}{\sqrt{11}}(\overline{e_1} + \overline{e_2} + 3\overline{e_3})$.

**2.** Beteckna den givna punkten med $A$. Välj vidare en punkt $B$ på $\Pi$; tag t.ex. $B = (1,0,0)$. Låt $C$ vara den sökta punkten. Vi har $\overline{AC} = \overline{AB}_{\|\overline{n}}$, där $\overline{n} = (1,2,-1)$ är normalvektor till $\Pi$. Med projektionsformeln bestäms $\overline{AB}_{\|\overline{n}} = (-3,-6,3)$. Den sökta punkten har samma koordinater som ortsvektorn $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = (4,8,1) + (-3,-6,3) = (1,2,4)$.

*Alternativt* kan $C$ bestämmas som skärningen mellan $\Pi$ och den linje genom $A$ som har riktningsvektor $\overline{n}$.

**3.** Med exempelvis Sarrus regel beräknas $\det A = 5 \neq 0$, så $A$ är inverterbar. Om vi multiplicerar ekvationen från vänster och från höger med $A^{-1}$ erhåller vi $X = A^{-1}(A^3 + ABA)A^{-1} = A + B$, varför

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**4.** De enda $x$ och $y$ som löser de båda översta ekvationerna är $x = 0$, $y = 0$. Däremot löser de inte den tredje ekvationen, så hela systemet är olösligt. När vi nu multiplicerar matrisformen av systemet från vänster med transponatet till koefficientmatrisen fås normalekvationen

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix},$$

vars enda lösning är $x = 1/2$, $y = 3/2$.

**5.** En riktningsvektor till $\ell$ ges av $\overline{v} = (1,-1,2)$. Vi har $F(\overline{u}) = \overline{u}_{\|\overline{v}}$. Med projektionsformeln bestäms bilderna av basvektorerna: $F((1,0,0)) =$

$\frac{1}{6}(1,-1,2)$, $F((0,1,0)) = -\frac{1}{6}(1,-1,2)$ och $F((0,0,1)) = \frac{1}{3}(1,-1,2)$, varför avbildningsmatrisen blir

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi observerar att alla vektorer $\overline{u} \neq \overline{0}$ som är parallella med $\ell$ uppfyller $F(\overline{u}) = \overline{u}$, vilket betyder att de är egenvektorer med egenvärde 1. Vidare har vi att alla vektorer $\overline{u} \neq \overline{0}$ som är ortogonala mot $\ell$ uppfyller $F(\overline{u}) = \overline{0}$, varför de är egenvektorer med egenvärde 0. Av exempelvis dimensionsskäl (de ovannämnda egenvektorerna spänner upp hela rummet) kan det inte finnas andra egenvektorer och därmed inga andra egenvärden.

*Alternativt* studeras sekularekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ vars rötter visar sig vara just $\lambda = 0$ (dubbelrot) och $\lambda = 1$.

**6.** Genom att eliminera direkt, alternativt genom att multiplicera systemet på matrisform med inversen till vänsterledets koefficientmatris, kan vi lösa ut $y_1'$ och $y_2'$. Vi får

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t) + 4y_2(t), \\ y_2'(t) &= \phantom{2}y_1(t) + 5y_2(t). \end{cases}$$

Vi söker nu egenvärden och egenvektorer till detta högerleds koefficientmatris. Sekularekvationen blir $(2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0$, vilket ger egenvärdena 1 och 6. De tillhörande egenvektorerna visar sig vara $\overline{v}_1 = s(4 \ \ -1)^T$ respektive $\overline{v}_6 = u(1 \ \ 1)^T$ $(s, u \neq 0)$. Därför ges den allmänna lösningen av

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t},$$

där $C_1$ och $C_2$ är godtyckliga konstanter.

**7.** Rummet har en ON-bas av egenvektorer till $A$ om och endast om $A$ är symmetrisk. Med andra ord måste $a = 0$, $b = 2$ och $c = -2$. Med dessa värden insatta söker vi egenvärden och egenvektorer till $A$. Sekularekvationen blir, efter förenkling, $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 = 0$. Efter lite testande inses att $\lambda = 1$ är en rot. Därför kan vi bryta ut faktorn $(\lambda - 1)$ ur polynomet, varefter de återstående egenvärdena 4 och 7 kan bestämmas. Motsvarande egenvektorer visar sig vara $\overline{v}_1 = s(-1 \ \ 2 \ \ 2)^T$, $\overline{v}_4 = t(2 \ \ 2 \ \ -1)^T$ och $\overline{v}_7 = u(2 \ \ -1 \ \ 2)^T$, där $s, t, u \neq 0$.

Välj nu $s$, $t$ och $u$ så att vi får enhetsvektorer; $s = t = u = 1/3$ duger. En ON-bas av egenvektorer till $A$ ges alltså av

$$\overline{f_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{f_3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

För att bestämma orienteringen observerar vi att $\overline{f_1} \times \overline{f_2} = -\overline{f_3}$, vilket innebär att den bas som här angivits är negativt orienterad.