Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Axel Hultman

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 6hp, 2013-03-11

Skrivtid 14–19. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd tre poäng. Betygsgränser: 8 poäng ger betyg 3, 12 poäng ger betyg 4 och 15 poäng ger betyg 5. Tid för tentamensvisning meddelas via kurshemsidan.

Alla koordinater nedan är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

1. Betrakta vektorerna $\overline{u} = 2\overline{e_1} + 4\overline{e_2} - 2\overline{e_3}$ och $\overline{v} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2} - \overline{e_3}$. Bestäm en vektor som har längd 2 och är ortogonal mot både $\overline{u}$ och $\overline{v}$.

2. Planet Π har ekvationen $x + 2y - z = 1$. Vilken punkt på Π ligger närmast punkten $(4, 8, 1)$?

3. Avgör om matrisen A är inverterbar. Lös sedan matrisekvationen $AXA = A^3 + ABA$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + \ \ y = 0, \\ x - \ \ y = 0, \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

saknar lösning. Använd sedan minstakvadratmetoden för att finna de x och y som bäst approximerar en lösning.

Var god vänd!

5. Låt ℓ vara linjen $(x, y, z) = t(1, -1, 2)$. Den linjära avbildningen F på rummet ges av ortogonalprojektion på ℓ. Finn F:s avbildningsmatris. Bestäm också alla F:s egenvärden.

6. Ange den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} 2y_1'(t) + y_2'(t) & = & 5y_1(t) + 13y_2(t), \\ y_1'(t) + y_2'(t) & = & 3y_1(t) + 9y_2(t). \end{cases}$$

7. Bestäm de reella talen a, b och c så att rummet har en ON-bas bestående av egenvektorer till matrisen A. Ange en sådan ON-bas. Vilken orientering har den bas du har angivit?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & a & b \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & c & 4 \end{pmatrix}.$$