Lösningsförslag, TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 2012-08-17

1. Volymen ges av absolutbeloppet av determinanten för matrisen som har vektorernas koordinater som kolonner (eller rader). Med hjälp av exempelvis Sarrus beräknas

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 12+0+0-(-3+144+0) = -129,$$

så volymen är 129 volymenheter.

2. Vi löser ut X ur ekvationen och får $X = A^{-1}B + A^{-1}$, det vill säga

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & 21 \\ 24 & -15 \end{pmatrix}.$$

3. Vi eliminerar i systemets totalmatris och får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a \end{array}\right).$$

Systemet går att lösa om och endast om högerledet i sista raden är noll, det vill säga då $a = 0$ eller $a = 2$.

Om $a = 0$ fås lösningarna $x = 1$, $y = -t$, $z = t$, där t är en godtycklig parameter. Om istället $a = 2$, blir lösningarna $x = -1$, $y = 2-t$, $z = t$, där t åter är en godtycklig parameter.

4. Låt P vara den punkt på ℓ som ligger närmast punkten $Q : (3, -1, 2)$. Låt vidare R vara en godtycklig punkt på ℓ; välj t.ex. $R : (5, 8, 0)$. Om $\bar{v}$ betecknar ℓ:s riktningvektor har vi nu sambandet

$$\overline{QP} = \overline{QR} - \overline{QR}_{\parallel \bar{v}}$$

Med projektionsformeln beräknas sålunda

$$\overline{QP} = (2, 9, -2) - \frac{(2, 9, -2) \bullet (1, 2, 0)}{5}(1, 2, 0) = (-2, 1, -2),$$

varför kortaste avståndet är $\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$ längdenheter. Punkten P har samma koordinater som ortsvektorn $\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP} = (3, -1, 2) + (-2, 1, -2) = (1, 0, 0)$.

5. Vi söker egenvärden och egenvektorer till koefficientmatrisen. Sekularekvationen blir efter förenkling $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 = 0$. Genom att inspektera/testa upptäcks roten $\lambda = 1$, varefter vänsterledet kan faktoriseras och ekvationen kan skrivas $-(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 7) = 0$, så egenvärdena är 1, 4 och 7. De tillhörande egenvektorerna visar sig vara $\overline{v_1} = s(-1, 2, 2)$, $\overline{v_4} = t(2, 2, -1)$ och $\overline{v_7} = u(2, -1, 2)$ $(s, t, u \neq 0)$. Systemets allmänna lösning är därför

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{7t}.$$

6. Planet Π består av de egenvektorer till A som har egenvärde 1, d.v.s. egenvektorerna till $6A$ med egenvärde 6. Det är lösningarna till systemet med totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5-6 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2-6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5-6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

så Π beskrivs av den kvarvarande ekvationen $x + 2y - z = 0$, vilket är en ekvation på normalform.

För att beskriva Π på parameterform behövs två ickeparallella vektorer som är parallella med planet. Kolonnerna i A utgör bilderna av basvektorerna och är därför parallella med planet. Ingen av dem är parallell med någon annan, så vi kan t.ex. välja de två första, varpå Π:s ekvation på parameterform kan skrivas $(x, y, z) = s(5, -2, 1) + t(-1, 1, 1)$

Alternativt kan vi efter att ha hittat parameterformen bestämma en normalvektor som $(5, -2, 1) \times (-1, 1, 1) = (-3, -6, 3)$, så ekvationen på normalform kan skrivas $-3x - 6y + 3z = 0$, vilket är ekvivalent med vad vi fick ovan.

7. Eftersom avbildningen är symmetrisk finns det en ON-bas av egenvektorer. I en sådan bas blir avbildningsmatrisen diagonal med motsvarande egenvärden på diagonalen.

Då alla vektorer som är parallella med det givna planet är egenvektorer med egenvärde 2, följer det att egenvektorerna med egenvärde 5 är planets normalvektorer. Som första basvektor tar vi därför en normalvektor med längd 1, t.ex. $\overline{f_1} = \frac{1}{\sqrt{26}}(1, 4, -3)$.

Som andra basvektor behövs en enhetsvektor som är ortogonal mot f_1. Vi kan t.ex. välja $\overline{f_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 0, 1)$.

Slutligen behövs en enhetsvektor som är ortogonal mot $\overline{f_1}$ och $\overline{f_2}$. För att $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ ska bli positivt orienterade väljer vi $\overline{f_3} = \overline{f_1} \times \overline{f_2} = \frac{1}{\sqrt{65}}(2, -5, -6)$.

Avbildningsmatrisen i denna bas blir, av skäl som anges ovan,

$$A_f = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$