

Linköpings universitet  
Matematiska institutionen  
Axel Hultman

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 6hp, 2012-08-17

Skrivtid 08–13. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd tre poäng.  
Betygsgränser: 8 poäng ger betyg 3, 12 poäng ger betyg 4 och 15 poäng ger betyg 5. Tid för tentamensvisning meddelas via kurshemsidan.

Alla koordinater nedan är givna i en positivt orienterad ON-bas  $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ .

1. Beräkna volymen av den parallelepiped som spänns upp av vektorerna  $\overline{u} = 4\overline{e}_1 - \overline{e}_3$ ,  $\overline{v} = \overline{e}_2 + 9\overline{e}_3$  och  $\overline{w} = 3\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 + 3\overline{e}_3$ .
2. Lös matrisekvationen  $A^2X - A = AB$ , där

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. För vilka värden på konstanten  $a$  är ekvationssystemet lösbart? Bestäm också systemets lösningar för dessa värden på  $a$ .

$$\begin{cases} ax + y + z = 0, \\ x + y + z = 1, \\ y + z = a. \end{cases}$$

4. Vilken punkt på linjen  $\ell : (x, y, z) = (5, 8, 0) + t(1, 2, 0)$  ligger närmast punkten  $(3, -1, 2)$ ? Hur stort är detta avstånd?

*Var god vänd!*

5. Finn alla lösningar till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 5y_1(t) && + 2y_3(t), \\ y_2'(t) &= && 3y_2(t) - 2y_3(t), \\ y_3'(t) &= 2y_1(t) - 2y_2(t) + 4y_3(t). \end{cases}$$

6. Matrisen  $A$  nedan är avbildningsmatris till en linjär avbildning på rummet. Denna avbildning ges av ortogonal projektion på ett plan  $\Pi$  som innehåller origo. (Det behöver du inte bevisa.) Bestäm ekvationer för  $\Pi$ , dels på parameterform och dels på normalform.

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. En symmetrisk avbildning  $F$  på rummet har egenvärdet 5. Dessutom gäller att  $F(\bar{u}) = 2\bar{u}$  för alla vektorer  $\bar{u}$  som är parallella med planet  $x + 4y - 3z = 0$ . Bestäm en positivt orienterad ON-bas i vilken avbildningsmatrisen för  $F$  är diagonal samt ange denna diagonalmatris.