Lösningsförslag, TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 2012-05-21

1. Vi observerar att $3\overline{u}-2\overline{v}+\overline{w}=\overline{0}$, så vektorerna är linjärt beroende. En alternativ lösningsmetod är att konstruera en matris som har vektorernas koordinater som kolonner (eller rader) och notera att matrisens determinant är noll.

2. Systemets totalmatris är

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

som medelst elimination kan överföras på (exempelvis) formen

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nedersta raden motsvarar ekvationen $0 = 1$, så systemet är olösligt.

Normalekvationen blir

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vars enda lösning är $x = 7/18$, $y = 1/6$.

3. Vi löser ut X ur ekvationen och får $X = AB^{-1}$, det vill säga

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 20 & -11 \end{pmatrix}.$$

4. En riktningsvektor för ℓ är detsamma som en normalvektor för Π. En sådan ges av vektorprodukten $(0,-2,1)\times(3,1,-1) = (1,3,6)$. Linjens ekvation kan därför skrivas $(x,y,z) = (1,1,1) + t(1,3,6)$.

5. Vi söker egenvärden och egenvektorer till koefficientmatrisen. Sekularekvationen blir $(7-\lambda)^2-9 = 0$ vars rötter är 4 och 10. De tillhörande egenvektorerna visar sig vara $\overline{v_4} = s(1,-1)$ och $\overline{v_{10}} = t(1,1)$ $(s,t \neq 0)$. Systemets allmänna lösning är därför

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{4t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{10t}.$$

Initialvillkoren säger nu $C_1 + C_2 = 11$ respektive $-4C_1 + 10C_2 = -2$. Detta ekvationssystem har den enda lösningen $C_1 = 8$, $C_2 = 3$, varför vår sökta lösning blir

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8e^{4t} + 3e^{10t} \\ -8e^{4t} + 3e^{10t} \end{pmatrix}.$$

6. Spegelbilden av en vektor $\overline{v}$ ges av $F(\overline{v}) = \overline{v} - 2\overline{v}_{\|\overline{n}}$, där $\overline{v}_{\|\overline{n}}$ betecknar den komposant av $\overline{v}$ som är parallell med planets normalvektor $\overline{n} = (1, -2, 2)$ eller, med andra ord, projektionen av $\overline{v}$ på $\overline{n}$.

Med hjälp av projektionsformeln beräknar man nu $F(\overline{e_1}) = \frac{1}{9}(7\overline{e_1} + 4\overline{e_2} - 4\overline{e_3})$, $F(\overline{e_2}) = \frac{1}{9}(4\overline{e_1} + \overline{e_2} + 8\overline{e_3})$ och $F(\overline{e_3}) = \frac{1}{9}(-4\overline{e_1} + 8\overline{e_2} + \overline{e_3})$, varför avbildningsmatrisen blir

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Lite trigonometri (där vi använder att $\cos 60^\circ = 1/2$ och $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$) ger $\overline{f_1} = \frac{1}{2}(\overline{e_1} + \sqrt{3}\overline{e_2})$, $\overline{f_2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\overline{e_1} + \overline{e_2})$ och $\overline{f_3} = \overline{e_3}$. Basbytesmatrisen blir därför

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

som är en ortogonalmatris vars invers således ges av

$$T^{-1} = T^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Koordinatmatrisen för $\overline{v}$ i den nya basen är därför

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}.$$