Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Axel Hultman

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 6hp, 2012-05-21

Skrivtid 08–13. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd tre poäng. Betygsgränser: 8 poäng ger betyg 3, 12 poäng ger betyg 4 och 15 poäng ger betyg 5. Tid för tentamensvisning meddelas via kurshemsidan.

Alla koordinater nedan är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

1. Betrakta de tre vektorerna $\overline{u} = 2\overline{e_1} - \overline{e_3}$, $\overline{v} = 3\overline{e_1} + 4\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$ och $\overline{w} = 8\overline{e_2} + 9\overline{e_3}$. Avgör om de är linjärt beroende.

2. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 3y &= 1, \\ 4x - 2y &= 1, \\ -x + y &= -1 \end{cases}$$

inte går att lösa. Bestäm sedan den bästa approximativa lösningen (i minstakvadrat-mening).

3. Lös matrisekvationen $(A^{-1}X)^{-1} = B$, där

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Låt Π vara planet som på parameterform ges av

$$(x, y, z) = s(0, -2, 1) + t(3, 1, -1).$$

En linje ℓ är vinkelrät mot Π och passerar genom punkten $(1, 1, 1)$. Bestäm en ekvation för ℓ på parameterform.

Var god vänd!

5. Finn den lösning till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 7y_1(t) + 3y_2(t), \\ y_2'(t) &= 3y_1(t) + 7y_2(t) \end{cases}$$

som uppfyller $y_1(0) = 11$ och $y_2'(0) = -2$.

6. Låt F vara avbildningen på rummet som ges av spegling i planet med ekvationen $x - 2y + 2z = 0$. Bestäm F:s avbildningsmatris.

7. Låt G vara avbildningen på rummet som ges av en vridning 60° i positiv led kring $\overline{e_3}$-axeln. Definiera en ny bas $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$, $\overline{f_3}$ genom att låta $\overline{f_1} = G(\overline{e_1})$, $\overline{f_2} = G(\overline{e_2})$ och $\overline{f_3} = G(\overline{e_3})$. Bestäm koordinaterna för vektorn $\overline{v} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$ i den nya basen.