Lösningsförslag, TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 2012-03-06

1. Med exempelvis Sarrus regel beräknas $\det A = 16 \neq 0$, så A är inverterbar. Vi har $\det B = 0$, så räkneregler för determinanter ger $\det(A^{-1}B) = \det B / \det A = 0/16 = 0$.

2. Systemets totalmatris är

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

som medelst elimination kan överföras på (exempelvis) formen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nedersta raden motsvarar ekvationen $0 = 1$, så systemet är olösligt.

Normalekvationen blir

$$\begin{pmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vars enda lösning är $x = 4/5$, $y = 22/15$.

3. Vi löser ut X ur ekvationen och får $X = A^{-1}(E - A)B = A^{-1}B - B$, det vill säga

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Två vektorer som är parallella med planet är linjens riktningsvektor $\overline{v} = (1, 2, -1)$ och $\overline{AB} = (1, -2, 1)$. En normalvektor till planet ges därför av vektorprodukten $\overline{AB} \times \overline{v} = (0, 2, 4)$. Planets ekvation är därför $2x_2 + 4x_3 = K$ för lämpligt K som bestäms till 2 genom att sätta in exempelvis A eller B. Planets ekvation blir alltså (efter division med två) $x_2 + 2x_3 = 1$.

5. Sekularekvationen $\det(A-\lambda E)=0$ blir $\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)=0$, så egenvärdena är -1, 0 och 1. De tillhörande egenvektorerna visar sig vara $\overline{v_1}=s(-1,0,1)$, $\overline{v_0}=t(1,0,1)$ och $\overline{v_{-1}}=u(0,1,0)$ $(s,t,u\neq 0)$. Om vi väljer (exempelvis) $s=t=u=1$, fås

$$T=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

(Det går också att välja s,t,u så att T blir en ortogonalmatris, men det behövs inte här.) Eftersom $D^{99}=D$ fås $A^{99}=TD^{99}T^{-1}=TDT^{-1}=A$.

6. Med projektionsformeln beräknar man $F(\overline{e_1})=\frac{2}{9}(2\overline{e_1}-\overline{e_2}-2\overline{e_3})$, $F(\overline{e_2})=\frac{-1}{9}(2\overline{e_1}-\overline{e_2}-2\overline{e_3})$ och $F(\overline{e_3})=\frac{-2}{9}(2\overline{e_1}-\overline{e_2}-2\overline{e_3})$, varför avbildningsmatrisen blir

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4&-2&-4\\-2&1&2\\-4&2&4\end{pmatrix}.$$

7. Förutom de givna egenvektorerna följer det ur uppgiftsformuleringen att $\overline{e_1}-\overline{e_2}-\overline{e_3}$ är en egenvektor med egenvärde 0. Vi kan därför diagonalisera avbildningsmatrisen A med hjälp av matriserna

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\3&0&-1\end{pmatrix}.$$

Lite matriskalkyl ger sedan

$$A=TDT^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-6&2\\6&8&-2\\6&6&0\end{pmatrix},$$

varför $F(\overline{e_1}+\overline{e_2}+\overline{e_3})=-8\overline{e_1}+12\overline{e_2}+12\overline{e_3}$.