Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Axel Hultman

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 6hp, 2012-03-06

Skrivtid 08–13. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd tre poäng. Betygsgränser: 8 poäng ger betyg 3, 12 poäng ger betyg 4 och 15 poäng ger betyg 5. Tid för tentamensvisning meddelas via kurshemsidan.

Alla koordinater nedan är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

1. Visa att A är inverterbar och beräkna sedan $\det(A^{-1}B)$ om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 3x - 2y = 0, \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

är olösligt. Bestäm sedan den bästa approximationen (i minstakvadrat-mening) till en lösning.

3. Lös matrisekvationen $AXB^{-1} + A = E$, där E är identitetsmatrisen och

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Låt ℓ vara linjen som har ekvationen $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 2, -1)$. Finn en ekvation, på normalform, för det plan som är parallellt med ℓ och innehåller punkterna $A : (1, 1, 0)$ och $B : (2, -1, 1)$.

Var god vänd!

5. Finn en diagonalmatris D och någon matris T så att $TDT^{-1} = A$ där

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna också A^{99}.

6. Låt F vara ortogonal projektion på vektorn $2\overline{e_1} - \overline{e_2} - 2\overline{e_3}$. Bestäm F:s avbildningsmatris.

7. Låt F vara en linjär avbildning på rummet. Antag att de två vektorerna $\overline{e_1} + 3\overline{e_3}$ och $\overline{e_1} - \overline{e_2}$ är egenvektorer till F, båda med egenvärde 2. Antag vidare att $F(\overline{e_2} + \overline{e_3}) = F(\overline{e_1})$. Bestäm F:s avbildningsmatris och bilden av vektorn $\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$.