LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra 6hp, 110819, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För betyg 3, 4 resp. 5 behövs 8, 12 resp. 15 poäng. Resultat meddelas via epost och tid för visning via kursens hemsida.
OBS! Alla koordinater (x_1, x_2, x_3) är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet (motsv. för planet).

1. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Bestäm determinanten av A samt matrisen A^{-2}.

2. Bestäm matrisen X så att $AX + B^{-1} = A^{-1} - B$, där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Bestäm den punkt R på linjen genom punkterna $P : (1, 2, 3)$ och $Q : (2, 4, -1)$ som ligger närmast origo. Ange också avståndet från R till origo.

4. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Bestäm, om det finns, en diagonalmatris D och en matris T sådan att $A = TDT^{-1}$.

5. Ange samtliga lösningar till systemet av differentialekvationer
$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 6x_2(t), \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) + 11x_2(t), \end{cases}$$
med begynnelsevärden $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 2$.

6. Bestäm avbildningsmatrisen A för ortogonal projektion på planet som innehåller linjen $(x, y, z) = t(1, 1, -2)$ och punkten $Q : (2, 2, -1)$.

7. Bestäm en ny ON-bas $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ för rummet, sådan att vektorn $\bar{f}_1$ är parallell med skärningslinjen mellan planen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ och $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$, och vektorn $\bar{f}_2$ är ortogonal mot planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ange därefter koordinaterna för en normalvektor till planet $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ i den nya basen.