Svar till Tentamen Linjär algebra TAIU05, 110607

1. Sarrus regel ger att $\det A = 4 + 4 - 2 - 4 = 2$. Vi har att

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 8 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Vi löser ut X ur ekvationen och vi får $X = B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})A^{-1} \Leftrightarrow$

$$X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

3. En riktningsvektor för L_1 är $\bar{v} = (0, 2, 2)$. Vi projicerar vektorn $\bar{u} = (2, 1, 1) - (1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ på $\bar{v}$ och får att projektionen $\bar{u}' = \frac{1}{2}(0, 1, 1)$, så att avståndet blir $|\bar{u} - \bar{u}'| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. Den karakteristiska ekvationen blir efter förenkling $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, så man får att egenvärdena blir -1, 1 och 2, med egenvektorer $t(-1, 1, 1)$, $t(1, -2, -1)$ resp. $t(1, -3, -2)$, $t \neq 0$. Matrisen D har egenvärdena på diagonalen och T har motsv. egenvektorer som kolonner.

5. Lösningen till systemet blir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9}{2}e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Avbildningsmatrisen blir

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & -5 & -2 \\ -5 & -10 & -10 \\ -2 & -10 & 11 \end{pmatrix}.$$

7. Projektion av $\bar{u}$ på $\bar{e}_3$ ger att $\bar{u}_1 = (0, 0, 2)$, så att $\bar{u} = (0, 0, 2) + (1, 3, 0)$. Vi får sedan ON-basen $\bar{f}_1 = (0, 0, 1)$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3, 0)$, $\bar{f}_3 = \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1, 0)$. Sambandet $X = TY$ mellan koordinaterna i den gamla basen och den nya ger därefter att $Y = T^t X = \frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{10}, 9, -7)$.