LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra 6hp, 110607, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För betyg 3, 4 resp. 5 behövs 8, 12 resp. 15 poäng. Resultat meddelas via epost och tid för visning via kursens hemsida.
OBS! Alla koordinater (x_1, x_2, x_3) är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet (motsv. för planet).

1. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Bestäm determinanten av A samt A^{-1} och A^3.

2. Bestäm matrisen X så att $BXA = A^{-1} + B^{-1}$, där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Låt L_1 vara linjen som går genom punkterna $P : (1, 0, 1)$ och $Q : (1, 2, 3)$, och låt L_2 vara den linje genom $R : (2, 1, 1)$ som är parallell med L_1. Bestäm kortaste avståndet mellan L_1 och L_2.

4. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestäm sedan en diagonalmatris D och en matris T sådan att $A = TDT^{-1}$.

5. Ange samtliga lösningar till systemet av differentialekvationer
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 3x_2(t), \\ x_2'(t) = -x_1(t) - 3x_2(t), \end{cases}$$
med begynnelsevärden $x_1(0) = 3$ och $x_2(0) = 2$.

6. Bestäm avbildningsmatrisen A för spegling i planet som innehåller origo samt punkterna $P : (1, -1, 2)$ och $Q : (2, 0, -1)$.

7. Dela upp vektorn $\bar{u} = (1, 3, 2)$ i två ortogonala komposanter $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ (dvs. $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$), så att vektorn $\bar{u}_1$ är parallell med x_3-axeln. Bestäm därefter en ON-bas $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ sådan att $\bar{f}_1$ är parallell med $\bar{u}_1$ och $\bar{f}_2$ är parallell med $\bar{u}_2$. Ange koordinaterna för vektorn $\bar{v} = (3, 2, 1)$ i den nya basen.