Svar till Tentamen Linjär algebra TAIU05, 110315

1. Sarrus regel ger att $\det A = -6 + 10 - 8 - 12 + 4 + 10 = -2$. Vi har att

$$A^3 = \begin{pmatrix} -8 & 23 & 16 \\ -2 & 3 & 2 \\ -5 & 19 & 13 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 6 & 4 \\ 5 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Vi löser ut X ur ekvationen och vi får $X = A^{-1} - A^{-1}B^2 \Leftrightarrow$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -34 & -82 \\ -11 & -26 \end{pmatrix}.$$

3. Linjen genom A och B har parameterform $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 1, 1)$ och avståndet från P, Q resp. R till linjen blir $1/\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ respektive 1. Så punkten P ligger närmast linjen.

4. Den karakteristiska ekvationen blir efter förenkling $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$, så man får att egenvärdena blir 0, 1 (dubbelt), med egenvektorer $t(1, -2, 1)$, $t \neq 0$ för egenvärdet 0 och alla vektorer parallella med planet $x - y - 2z = 0$ för egenvärde 1.

5. Lösningen till systemet blir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. Sätter vi den obekanta basvektorn $\bar{f}_3$ till (a, b, c) ger sambandet mellan koordinaterna för en vektor i olika baser $X = TY$, där $X = (1\ 2\ 3)^t$, $Y = (1\ -1\ 2)^t$ och T är basbytesmatrisen, att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Systemet ovan ger att $\bar{f}_3 = (1/2, 1/2, 1)$. Insatt i T ser vi att $\det T \neq 0$, så $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ är linjärt oberoende.

7. Planet består av alla egenvektorer med egenvärde $\lambda = 1$ och blir $x - 2y - 2z = 0$. Ortogonal projektion på planet kan nu beräknas och vi får avbildningsmatrisen

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$