LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra 6hp, 110315, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För betyg 3, 4 resp. 5 behövs 8, 12 resp. 15 poäng. Resultat meddelas via epost och tid för visning via kursens hemsida.
OBS! Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet (motsv. för planet).

1. Låt
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestäm A^3, determinanten av A samt inversen av A om den finns.

2. Bestäm matrisen X så att $AXB^{-1} + B = B^{-1}$, där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Avgör vilken av punkterna $P : (1, 0, 0)$, $Q : (0, 1, 0)$ och $R : (0, 0, 1)$ som ligger närmast linjen genom punkterna $A : (1, 2, 3)$ och $B : (1, 3, 4)$.

4. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Bestäm sedan en diagonalmatris D och en matris T sådan att $A = TDT^{-1}$.

5. Ange samtliga lösningar till systemet av differentialekvationer
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 3x_2(t), \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + x_2(t), \end{cases}$$
med begynnelsevärden $x_1(0) = 2$ och $x_2(0) = 4$.

6. Låt $\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ och $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_3$, och bestäm $\bar{f}_3$ så att vektorn $\bar{u} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$ får koordinaterna $(1, -1, 2)$ i basen $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$. Visa även att vektorerna $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ är linjärt oberoende.

7. Avbildningsmatrisen för spegling i ett visst plan genom origo ges av
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ange avbildningsmatrisen för ortogonal projektion på samma plan.