

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra 6hp, 090817, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För betyg 3, 4 resp. 5 räcker 8, 11 resp. 14 poäng. Resultat meddelas via epost och tid för visning via kursens hemsida.

OBS! Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet (motsv. för planet).

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna A^3 , determinanten av A samt inversen av A om den finns.

2. Finn en 2×2 matris X sådan att $BX^{-1} = A^{-1}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Bestäm normalekvationen för planet M som innehåller de tre punkterna $A : (1, 1, 2)$, $B : (1, -1, 3)$ och $C : (2, 3, 4)$. Bestäm därefter skärningen mellan planet M och linjen L som går genom punkterna $D : (1, 2, 0)$ och $E : (3, 4, 2)$. Avgör slutligen om punkten $F : (1, 0, 1)$ ligger på linjen L .

4. Visa att vektorerna $\bar{f}_1 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ och $\bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ bildar en bas för planet. Antag att den linjära avbildningen F har matrisen $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i basen \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Bestäm A_f , dvs F :s matris i basen \bar{f}_1, \bar{f}_2 .

5. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 4x_2(t), \\ x_2'(t) = 6x_1(t) + 11x_2(t), \end{cases}$$

med begynnelsevärden $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

6. Bestäm matrisen A för ortogonal projektion på planet $2x_1 + x_3 = 0$.

7. Bestäm en positivt orienterad ON-bas $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ för rummet sådan att \bar{f}_1 är parallell med skärningen mellan planen $x + y - z = 0$ och $x + y = 0$ och \bar{f}_2 är parallell med $x + y = 0$.

Svar till Tentamen Linjär algebra TAIU05, 090817

1. $\det A = -3$,

$$A^3 = \begin{pmatrix} -9 & 12 & -9 \\ -6 & 3 & -3 \\ 6 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$X = AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Planet M har ekv. $6x - y - 2z = 1$. Skärningspunkten är $(0, 1, -1)$. Punkten F ligger ej på linjen.

4. Basbytesmatrisen T är inverterbar så vektorerna bildar en bas för planet. Man får

$$A_f = T^{-1}A_eT = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 15 & 13 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2e^{7t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6.

$$A_e = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Till exempel

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$