

Lösningförslag till Tentamen Linjär algebra TAIU05, 090609

1. Vi löser ut matrisen X ur ekvationen och beräknar A^{-1} . Vi får att

$$(X - A)^{-1}B = A \Leftrightarrow X - A = (AB^{-1})^{-1} \Leftrightarrow X = A + BA^{-1} \Leftrightarrow$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Matrisen A har egenvärden -1 och 3 och respektive egenvektorer $t(1, -1)$ och $t(1, 1)$, $t \neq 0$, så vi får att

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi får sedan, eftersom $A^{25} = TD^{25}T^{-1}$, att

$$A^{25} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3^{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{25} - 1 & 3^{25} + 1 \\ 3^{25} + 1 & 3^{25} - 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vektorn $\bar{u} = (1, 0, 0)$ går mellan punkten A i planet och origo på linjen. Längden av projektionen av \bar{u} på planets normal blir därför det sökta avståndet. Normalen \bar{n} till planet fås genom att ta kryssprodukten mellan vektorerna $\bar{A}\bar{B}$ och $\bar{A}\bar{C}$ och blir (en multipel av) $(1, 1, 1)$. Planet har ekvationen $x + y + z = 1$. Vi får med projektionsformeln att

$$\frac{\bar{u} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så avståndet blir $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Det är enkelt att kolla att vektorerna har längd 1 och är parvis ortogonala. Dessutom är $\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \bar{f}_3$ så de bildar en positivt orienterad ON-bas. Vektorerna \bar{f}_1 , \bar{f}_2 och \bar{f}_3 bildar kolonnerna i en matris T som anger sambandet mellan gamla och nya koordinater, $X = TY$. Således blir $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ i nya koordinater

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2(2y_1 - 2y_2 + y_3) + 3(2y_1 + y_2 - 2y_3) = 0 \Leftrightarrow 11y_1 + y_2 - 2y_3 = 0.$$

5. Vi söker först egenvektorer och egenvärden till koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$. Efter räkningar finner vi att egenvärdena blir -1 och 3 med egenvektorer $t(1, -4)$ respektive $t(1, 4)$. Allmänna lösningen blir därför

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Begynnelsevärdena ger till slut att $C_1 = 3/8$ och $C_2 = 5/8$, så lösningen till systemet blir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{3e^{-t}}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{5e^{3t}}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6. Normalen till planet blir (rita bild!) lika med $\bar{n} = \bar{u} - F(\bar{u}) = (1, 2, -1)$ och eftersom planet innehåller origo får det ekvationen $x + 2y - z = 0$. Då F är en ortogonal projektion har F egenvärdena 0, 1 och 1, med egenvektorer parallellt med normalen (för 0) och parallella med planet (för egenvärdet 1). Vi väljer två linjärt oberoende vektorer i planet för att tillsammans med normalen få en bas av egenvektorer. Då blir

$$\begin{aligned} A_e = TDT^{-1} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. En normallinje till linjen $2x + y = 5$ har riktningsvektor $(2, 1)$ så normallinjen genom $(10, 10)$ har ekvationen $(x, y) = (10 + 2t, 10 + t)$. Denna linje skär den givna linjen i den punkt R som ligger närmast cirkeln. Vi får skärningspunkten genom att lösa ekvationen $2(10 + 2t) + (10 + t) = 5$, dvs $t = -5$ vilket ger $R : (0, 5)$. Vidare är vektorn mellan cirkelns medelpunkt och R lika med $(-10, -5)$, så punkten P som ligger på cirkelns periferi närmast R får vi med vektoraddition från origo till $(10, 10)$ och sträckan $\sqrt{5}$ i riktning mot R och blir

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{125}} \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$