

**Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra 6hp, 090609, kl 8-13.**

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För betyg 3, 4 resp. 5 räcker 8, 11 resp. 14 poäng. Resultat meddelas via epost och tid för visning via kursens hemsida.

**OBS!** Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  för rummet (motsv. för planet).

1. Finn en  $2 \times 2$  matris  $X$  sådan att  $(X - A)^{-1}B = A$ , där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Bestäm en matris  $T$  och en diagonalmatris  $D$  sådana att  $A = TDT^{-1}$  om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna sedan  $A^{25}$ .

3. Bestäm det minsta avståndet mellan linjen  $(x, y, z) = t(-2, 1, 1)$  och planet som går genom punkterna  $A : (1, 0, 0)$ ,  $B : (0, 1, 0)$  och  $C : (0, 0, 1)$ .

4. Visa att vektorerna  $\bar{f}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{f}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\bar{f}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  bildar en positivt orienterad ON-bas för rummet. Bestäm därefter ekvationen för planet  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$  (gamla koordinater) i basen  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ .

5. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} 2x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = 8x_1(t) + x_2(t), \end{cases}$$

med begynnelsevärden  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ .

6. Låt  $F$  vara den linjära avbildning som projicerar varje vektor i rummet ortogonalt på planet  $M$ . Antag att  $M$  innehåller origo och att  $F$  projicerar vektorn  $\bar{u} = (2, 3, 2)$  på vektorn  $F(\bar{u}) = (1, 1, 3)$ . Bestäm planets ekvation samt avbildningsmatrisen för  $F$ .
7. Vilken punkt på cirkeln med centrum i  $(10, 10)$  och radie  $\sqrt{5}$  ligger närmast linjen  $2x + y = 5$ ?