LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra 6hp, 090609, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För betyg 3, 4 resp. 5 räcker 8, 11 resp. 14 poäng. Resultat meddelas via epost och tid för visning via kursens hemsida.
OBS! Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet (motsv. för planet).

1. Finn en 2×2 matris X sådan att $(X - A)^{-1}B = A$, där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Bestäm en matris T och en diagonalmatris D sådana att $A = TDT^{-1}$ om
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Beräkna sedan A^{25}.

3. Bestäm det minsta avståndet mellan linjen $(x, y, z) = t(-2, 1, 1)$ och planet som går genom punkterna $A : (1, 0, 0)$, $B : (0, 1, 0)$ och $C : (0, 0, 1)$.

4. Visa att vektorerna $\bar{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\bar{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bildar en positivt orienterad ON-bas för rummet. Bestäm därefter ekvationen för planet $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ (gamla koordinater) i basen $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$.

5. Lös systemet av differentialekvationer
$$\begin{cases} 2x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = 8x_1(t) + x_2(t), \end{cases}$$
med begynnelsevärden $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

6. Låt F vara den linjära avbildning som projicerar varje vektor i rummet ortogonalt på planet M. Antag att M innehåller origo och att F projicerar vektorn $\bar{u} = (2, 3, 2)$ på vektorn $F(\bar{u}) = (1, 1, 3)$. Bestäm planets ekvation samt avbildningsmatrisen för F.

7. Vilken punkt på cirkeln med centrum i $(10, 10)$ och radie $\sqrt{5}$ ligger närmast linjen $2x + y = 5$?

Lösningsförslag till Tentamen Linjär algebra TAIU05, 090609

1. Vi löser ut matrisen X ur ekvationen och beräknar A^{-1}. Vi får att

$$(X-A)^{-1}B = A \Leftrightarrow X - A = (AB^{-1})^{-1} \Leftrightarrow X = A + BA^{-1} \Leftrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Matrisen A har egenvärden -1 och 3 och respektive egenvektorer $t(1,-1)$ och $t(1,1)$, $t \neq 0$, så vi får att

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi får sedan, eftersom $A^{25} = TD^{25}T^{-1}$, att

$$A^{25} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3^{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{25}-1 & 3^{25}+1 \\ 3^{25}+1 & 3^{25}-1 \end{pmatrix}.$$

3. Vektorn $\bar{u} = (1,0,0)$ går mellan punkten A i planet och origo på linjen. Längden av projektionen av $\bar{u}$ på planets normal blir därför det sökta avståndet. Normalen $\bar{n}$ till planet fås genom att ta kryssprodukten mellan vektorerna $\bar{AB}$ och $\bar{AC}$ och blir (en multipel av) $(1,1,1)$. Planet har ekvationen $x+y+z=1$. Vi får med projektionsformeln att

$$\frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så avståndet blir $\dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Det är enkelt att kolla att vektorerna har längd 1 och är parvis ortogonala. Dessutom är $\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \bar{f}_3$ så de bildar en positivt orienterad ON-bas. Vektorerna $\bar{f}_1,\ \bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ bildar kolonnerna i en matris T som anger sambandet mellan gamla och nya koordinater, $X = TY$. Således blir $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ i nya koordinater

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2(2y_1 - 2y_2 + y_3) + 3(2y_1 + y_2 - 2y_3) = 0 \Leftrightarrow 11y_1 + y_2 - 2y_3 = 0.$$

5. Vi söker först egenvektorer och egenvärden till koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$. Efter räkningar finner vi att egenvärdena blir -1 och 3 med egenvektorer $t(1,-4)$ respektive $t(1,4)$. Allmänna lösningen blir därför

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Begynnelsevärdena ger till slut att $C_1 = 3/8$ och $C_2 = 5/8$, så lösningen till systemet blir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{3e^{-t}}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{5e^{3t}}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6. Normalen till planet blir (rita bild!) lika med $\bar{n} = \bar{u} - F(\bar{u}) = (1, 2, -1)$ och eftersom planet innehåller origo får det ekvationen $x + 2y - z = 0$. Då F är en ortogonal projektion har F egenvärdena 0, 1 och 1, med egenvektorer parallellt med normalen (för 0) och parallella med planet (för egenvärdet 1). Vi väljer två linjärt oberoende vektorer i planet för att tillsammans med normalen få en bas av egenvektorer. Då blir

$$A_e = TDT^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. En normallinje till linjen $2x + y = 5$ har riktningsvektor $(2, 1)$ så normallinjen genom $(10, 10)$ har ekvationen $(x, y) = (10 + 2t, 10 + t)$. Denna linje skär den givna linjen i den punkt R som ligger närmast cirkeln. Vi får skärningspunkten genom att lösa ekvationen $2(10 + 2t) + (10 + t) = 5$, dvs $t = -5$ vilket ger $R : (0, 5)$. Vidare är vektorn mellan cirkelns medelpunkt och R lika med $(-10, -5)$, så punkten P som ligger på cirkelns periferi närmast R får vi med vektoraddition från origo till $(10, 10)$ och sträckan $\sqrt{5}$ i riktning mot R och blir

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{125}} \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$