LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra 6hp, 090310, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv personnummer och namn på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För betyg 3, 4 resp. 5 räcker 8, 11 resp. 14 poäng. Resultat meddelas via epost och tid för visning via kursens hemsida.
OBS! Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet (motsv. för planet).

1. Visa att vektorerna $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildar en bas för rummet. Bestäm därefter koordinaterna för vektorn $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i basen $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$.

2. Lös matrisekvationen $AX^tB^{-1} = B$, där
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Beräkna det minsta avståndet mellan de parallella linjerna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Ange en positivt orienterad ON-bas $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ för rummet sådan att $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$ är parallella med planet $x + 2y - 2z = 0$.

5. Lös systemet av differentialekvationer
$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t), \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t), \end{cases}$$
med begynnelsevärden $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 7$.

6. Låt $\bar{v}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{v}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ och $\bar{v}_3 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ och låt F vara den linjära avbildning som avbildar $\bar{v}_1$ på $\bar{v}_2$, $\bar{v}_2$ på $\bar{v}_3$ och $\bar{v}_3$ på $\bar{v}_1$. Bestäm avbildningsmatrisen A för F.

7. Låt T vara triangeln med hörn i punkterna $A : (1, 1, -1)$, $B : (-1, 1, 1)$ och $C : (1, -1, 1)$. Visa, med fullständig motivering, att linjen $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$ passerar innanför triangelns kanter. Ange också i vilken punkt linjen skär triangelns plan.