LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jesper Thorén

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra 6hp, 090310, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv personnummer och namn på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För betyg 3, 4 resp. 5 räcker 8, 11 resp. 14 poäng. Resultat meddelas via epost och tid för visning via kursens hemsida.
OBS! Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet (motsv. för planet).

1. Visa att vektorerna $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildar en bas för rummet. Bestäm därefter koordinaterna för vektorn $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i basen $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$.

2. Lös matrisekvationen $AX^tB^{-1} = B$, där
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Beräkna det minsta avståndet mellan de parallella linjerna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Ange en positivt orienterad ON-bas $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ för rummet sådan att $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$ är parallella med planet $x + 2y - 2z = 0$.

5. Lös systemet av differentialekvationer
$$\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) &+ 2x_2(t), \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) &- 2x_2(t), \end{cases}$$
med begynnelsevärden $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 7$.

6. Låt $\bar{v}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{v}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ och $\bar{v}_3 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ och låt F vara den linjära avbildning som avbildar $\bar{v}_1$ på $\bar{v}_2$, $\bar{v}_2$ på $\bar{v}_3$ och $\bar{v}_3$ på $\bar{v}_1$. Bestäm avbildningsmatrisen A för F.

7. Låt T vara triangeln med hörn i punkterna $A : (1, 1, -1)$, $B : (-1, 1, 1)$ och $C : (1, -1, 1)$. Visa, med fullständig motivering, att linjen $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$ passerar innanför triangelns kanter. Ange också i vilken punkt linjen skär triangelns plan.

Lösningsförslag till Tentamen Linjär algebra TAIU05, 090310

1. Matrisen T med $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ som kolonner är inverterbar med invers

$$T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

så vektorerna bildar en bas. I basen $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ blir sedan koordinaterna för $\bar{u}$

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Vi löser ut matrisen X^t ur ekvationen och beräknar matrisinverserna. Vi har

$$AX^tB^{-1} = B \Leftrightarrow AX^t = B^2 \Leftrightarrow X^t = A^{-1}B^2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix},$$

så att $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -3 & -19 \end{pmatrix}$ efter transponering.

3. Avståndet mellan de två parallella linjerna beräknas genom att man hittar en vektor $\bar{u}$ från en punkt på den ena linjen till en punkt på den andra. Om $\bar{u}'$ är vektorns projektion på riktningsvektorn till den ena linjen blir avståndet $|\bar{u} - \bar{u}'|$. Vi får med projektionsformeln att

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \bar{u}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så att $|\bar{u} - \bar{u}'| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

4. Vi sätter $\bar{f}_3$ till normalen till planet (längd 1) och väljer en vektor av längd 1 i planet. En positivt orienterad ON-bas fås sedan med kryssprodukten. Vi får

$$\bar{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \bar{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \bar{f}_2 = \bar{f}_3 \times \bar{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Då blir $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ en positivt orienterad ON-bas för rummet.

5. Vi söker först egenvektorer och egenvärden till koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Efter räkningar finner vi att egenvärdena blir -3 och 4 med egenvektorer $t(1, -3)$ respektive $t(2, 1)$. Allmänna lösningen blir därför

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Begynnelsevärdena ger till slut att $C_1 = -2$ och $C_2 = 1$, så lösningen till systemet blir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Förutsättningarna säger att

$$\begin{cases} F(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3) & = & -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \\ F(-\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) & = & \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \\ F(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3) & = & \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3, \end{cases}$$

och linjäriteten hos F ger efter lösning av ekvationssystemet att $F(\bar{e}_1) = \bar{e}_2$, $F(\bar{e}_2) = \bar{e}_3$ och $F(\bar{e}_3) = \bar{e}_1$, vilket i sin tur ger avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Vi bildar vektorerna $\bar{u} = \bar{AB}$ och $\bar{v} = \bar{AC}$. Eftersom (t.ex.) punkten A ligger i planet kan vi hitta dess ekvation på parameterform. Planet blir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Med linjen $t(1, 1, 1)$ insatt för (x, y, z) får vi lösningen till systemet till

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Mittpunkten på sträckan BC är $\bar{OA} + \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v}$ och då ligger alltså skärningspunkten $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ innanför triangelns kanter.