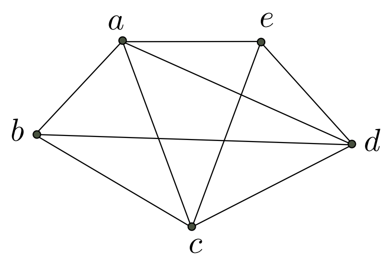
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
764G06 Diskret matematik och logik, 6 hp
2018-08-13

---

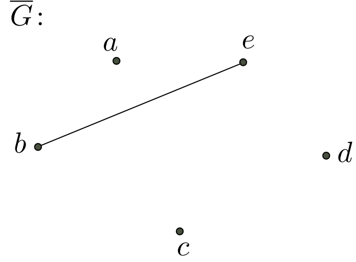
1. I figuren intill visas grafen G på nodmängden $A = \{a, b, c, d, e\}$.



   a) En komplett graf har bågar mellan alla par av noder. G är **ej** en komplett graf då den saknar en båge mellan noderna b och e.

   b) Komplementet $\overline{G}$ har samma noder som G, men har bågar mellan de noder som G inte har. Komplementet till G visas i figuren till höger.

$\overline{G}$:



   c) Enligt sats 6.2 har en graf en öppen eulerväg om precis två noder har udda grad och har en sluten eulerväg om alla noder har jämnt gradtal.

   Då noderna b och e har grad 3 (två av udda gradtal) och övriga noder har grad 4 (jämnt gradtal) finns det enligt satsen en öppen eulerväg, men ingen sluten eulerväg. Ett exempel på en öppen eulerväg är $b-c-d-e-a-b-d-a-c-e$.

Svar: a) Grafen är ej komplett då bågen (b, e) saknas.
b) $\overline{G}$ anges i bild ovan.
c) G har en öppen eulerväg, men ej en sluten. Se motivering och exempel ovan.

2. Vi har $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{b, d, f\}$ i grundmängden $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

   a) Vi får $(B \cup C) = \{b, c, d, f\}$, vilket ger $(B \cup C)^c = \{a, e, g\}$. Med tre element så finns det 8 delmängder till denna mängd, nämligen:
   $\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{g\}, \{a, e\}, \{a, g\}, \{e, g\}, \{a, e, g\}$.

   b) B och A har elementen b och c gemensamma. Bara elementet d finns i B, men inte A, så de delmängder till B som *inte* innehåller minst ett element från A är därmed bara $\{d\}$ respektive $\emptyset$. Då B innehåller tre element så har den totalt 8 delmängder, där alla utom 2 innehåller minst ett element ur A, alltså 6 stycken. (Dessa är $\{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}$.)

Svar: a) $(B \cup C)^c$ har delmängderna $\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{g\}, \{a, e\}, \{a, g\}, \{e, g\}, \{a, e, g\}$.
b) 6 delmängder till B innehåller minst ett element från A.

3. Vi har uttrycken S_1: $\neg p \wedge (q \rightarrow p)$ och S_2: $\neg(p \vee (q \wedge p))$.

   För att besvara frågorna gör vi en sanningsvärdestabell för de båda uttrycken samt för uttrycken $S_1 \rightarrow S_2$ respektive $S_2 \rightarrow S_1$.

p	q	$\neg p$	$q \rightarrow p$	S_1 : $\neg p \wedge (q \rightarrow p)$	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$	S_2 : $\neg(p \vee (q \wedge p))$	$S_1 \rightarrow S_2$	$S_2 \rightarrow S_1$
1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1

   a) Är S_1 eller S_2 en tautologi respektive en kontradikation? Då sanningsvärdestabellen för S_1 och S_2 varken består av enbart 1:or eller enbart 0:or så är ingen av dem en tautologi eller kontradiktion.

   b) S_1 och S_2 är inte logiskt ekvivalenta då deras sanningsvärden skiljer sig åt på en rad, rad tre i tabellen ovan, där S_1 är falsk medan S_2 är sann.

   c) I de två sista kolumnerna i tabellen ser vi implikationerna $S_1 \rightarrow S_2$ respektive $S_2 \rightarrow S_1$. Då bara $S_1 \rightarrow S_2$ är en tautologi gäller därför att $S_1 \Rightarrow S_2$, men inte att $S_2 \Rightarrow S_1$. På rad tre är S_2 sann samtidigt som S_1 är falsk, vilket där ger $S_2 \rightarrow S_1$ falsk.

   Svar: a) Ingen av S_1 och S_2 är en tautologi, ej heller en kontradiktion.
   b) S_1 och S_2 är ej logiskt ekvivalenta. De har olika sanningsvärden på en rad.
   c) Det är korrekt att $S_1 \Rightarrow S_2$, men inte att $S_2 \Rightarrow S_1$.

4. a) Ordet SOMMAR har sex bokstäver, varav två M, så alla bokstäver ska vara med i de följder som bildas. Sex bokstäver kan omordnas på 6! olika sätt, men då de två M:n byter plats får vi inte en ny bokstavsföljd. Antalet olika bokstavsföljder blir därför:

   $$\frac{6!}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \text{ stycken.}$$

   b) Vi räknar först ut hur många av följderna ovan där två M står intill varandra och tar sedan det totala antalet minus dessa. Vi kan tänka att vi skriver ihop MM på en lapp och de övriga fyra bokstäverna på separata lappar. Vi får då 5 lappar som kan omordnas, vilket ger totalt $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ olika sådana följder. Om vi drar bort dessa från de 360 får vi $360 - 120 = 240$ följder där två M inte står intill varandra.

   Svar: a) Vi kan bilda 360 olika bokstavsföljder.
   b) 240 av följderna i a) innehåller inte två M intill varandra.

5. Vi har slutledningen:

   ”Om Fia vinner i spelet så bjuder hon de förlorande medspelarna på glass. När de förlorande medspelarna får glass blir de glada. Slutsats: Om Fia vinner i spelet så blir de förlorande medspelarna glada”

   Låt p: Fia vinner i spelet, q: de förlorande medspelarna bjuds på glass,
   r: de förlorande medspelarna är glada. Slutledningen ovan blir då på satslogisk form:

   $$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \;\Rightarrow\; (p \rightarrow r)$$

Detta är precis Syllogismlagen (kedjeregeln), så deduktion ger:

1.)	$p \to q$	Förutsättning
2.)	$q \to r$	Förutsättning
3.)	$p \to r$	1.), 2.) och Syllogismlagen.

Vi har alltså härlett $p \to r$ ur de båda förutsättningarna och därmed visat att slutledningen är korrekt. (Kan också visas med reduktion eller med sanningsvärdestabell.) Det är alltså korrekt ur dessa premisser att de förlorande medspelarna blir glada om Fia vinner i spelet. Orsaken är dock inte hennes vinst utan det faktum att hon bjuder på glass. (Intuitivt kan det kännas bakvänt. Notera dock att vi i praktiken samtidigt kan känna besvikelse för förlusten och glädje för att Fia bjuder på glass, vilket inte fångas i denna slutledning.)

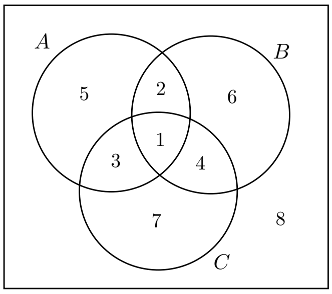
Svar: Det är korrekt att ur dessa premisser dra slutsatsen: ”Om Fia vinner i spelet så blir de förlorande medspelarna glada”. Se satslogiskt uttryck och härledning ovan.

6. En undersökning visar att a) gäller, medan b) inte gör det. Vi ger därför ett bevis för likheten i a) och ett motexempel för likheten i b).

a) $(A^c \cap B^c) \setminus C^c = (C \setminus A) \setminus B)$

Vi använder ett numrerat venndiagram och går igenom operationerna i vänsterled och högerled var för sig och ser vilka områden de svarar mot. (Av utrymmesskäl redovisas A, B och C endast i HL.)

VL:	HL:
A^c: 4,6,7,8	A: 1,2,3,5
B^c: 3,5,7,8	C: 1,3,4,7
$A^c \cap B^c$: 7,8	$C \setminus A$: 4,7
C^c: 2,5,6,8	B: 1,2,4,6
VL=$(A^c \cap B^c) \setminus C^c$: 7	HL=$(C \setminus A) \setminus B$: 7



Då VL och HL svarar mot samma område i det numrerade venndiagrammet ovan har vi visat att likheten gäller för alla mängder A, B och C.

b) $C \setminus (A \cup B) = (A \cup B)^c$

Likheten gäller ej och vi ger ett motexempel.

Låt $A = B = C = \{a\}$ och $\mathcal{U} = \{a, b\}$. Då är

VL$= \{a\} \setminus (\{a\} \cup \{a\}) = \{a\} \setminus \{a\} = \emptyset$, medan HL$= (\{a\} \cup \{a\})^c = \{a\}^c = \{b\}$.

Då vänster- och högerled i exemplet ovan inte är lika gäller alltså inte påståendet för alla mängder A, B och C.

Svar: Se bevis för likheten a) och motexempel för likheten i b) ovan.

7. Vi har relationen ”mindre än eller lika med” ($\leq$) på mängden $A = \{1, 2, 3, ...100\}$. Mer precist är $x\mathcal{R}y$ om $x \leq y$, där x, y är element i A. En relation är en ekvivalensrelation om den är reflexiv, symmetrisk och transitiv. En relation är istället en partialordning om den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv. Vi går igenom de fyra egenskaperna:

Reflexiv? Ja, eftersom $x \leq x$ för alla $x \in A$.

Symmetrisk? Nej, till exempel är $1 \leq 2$, men $2 \not\leq 1$.

Var god vänd

Antisymmetrisk? Ja, om $x \leq y$ och $x \neq y$ så är aldrig $y \leq x$, för alla x,$y \in A$.

Transitiv? Ja, om $x \leq y$ och $y \leq z$ så är alltid $x \leq z$, för alla x, y och z i A.

Då relationen ej är symmetrisk är den inte en ekvivalensrelation, men då den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv så är den en partialordning.

Svar: Relationen är ej en ekvivalensrelation, men den är en partialordning. Se motiveringar ovan.