Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

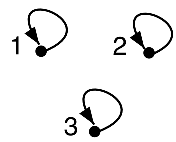
Lösningar till tentamen
764G06 Diskret matematik och logik, 6 hp
2018-03-05

---

1. Vi har $A = \{1, 2, 3\}$.

   a) Låt $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$. Denna relation är reflexiv då alla element relaterar till sig själva, den är antisymmetrisk då alla förbindelser mellan olika element är enkelriktade, men den är inte transitiv då $1\mathcal{R}2$ och $2\mathcal{R}3$, men $1\not\mathcal{R}3$

   b) I figuren intill visas relationsgrafen för relationen "lika med" på A. Elementen är endast relaterade till sig själva.



2. Uttrycken är logiskt ekvivalenta och vi kan visa det med hjälp av en sanningsvärdestabell eller genom att skriva om det ena uttrycket till det andra med hjälp av ekvivalenser (se formelblad). Vi väljer det senare här:

$$(p \wedge \neg q) \vee r \underset{\text{Distributiv lag}}{\Leftrightarrow} (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \underset{\text{Dubbel neg.}}{\Leftrightarrow} (\neg\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \underset{\text{Implikationslagen 2ggr}}{\Leftrightarrow} (\neg p \to r) \wedge (q \to r)$$

   Vi har visat att uttrycken är logiskt ekvivalenta. (Frågan om implikation skulle bara besvaras om de inte var ekvivalenta, men vill man besvara den så implicerar båda uttrycken varandra eftersom de är ekvivalenta.)

   Svar: Ja, de är logiskt ekvivalenta. Se omskrivning ovan.

3. a) Summan av gradtalen här är $4 \cdot 8 + 1 \cdot 5 + 10 \cdot 3 = 32 + 5 + 30 = 67$, men enligt handskakningslemmat är summan av gradtalen för varje graf jämn, så alltså är svaret nej, det kan inte inte finnas en graf med just dessa noder då summan av gradtalen här blir udda.

   b) Då grafen är ett träd gäller $N = B + 1$ där N är antalet noder och B är antalet bågar. Från uppgiften har vi åtta noder av grad 4 samt ett visst antal löv. Låt x vara antalet löv. Vi har då $N = 8 + x$ noder. (1.)

   Enligt handskakningslemmat är antalet bågar lika med summan av gradtalen delat med 2. Alltså har vi:

$$B = \frac{\text{Summan av gradtalen}}{2} = \frac{8 \cdot 4 + x \cdot 1}{2} = \frac{32 + x}{2}. \quad (2.)$$

   Om vi sätter in antalet noder (1.) och antalet bågar (2.) i sambandet $N = B + 1$ så får vi:

Var god vänd

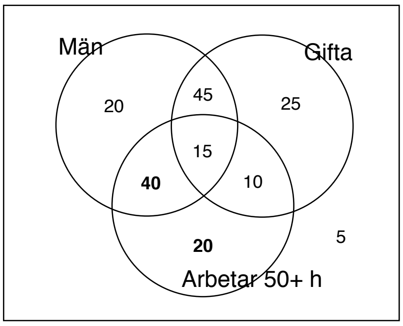
$$N = B + 1 \Leftrightarrow 8 + x = \frac{32 + x}{2} + 1 \Leftrightarrow 16 + 2x = 32 + x + 2 \Leftrightarrow$$

$$16 + x = 34 \Leftrightarrow x = 18$$

Antalet löv i grafen är alltså 18 stycken.

Svar: a) Nej, det finns ingen sådan graf enligt handskakningslemmat då summan av gradtalen blir udda.
b) Grafen har 18 stycken löv.

4. Vi använder ett venndiagram för att strukturera informationen i uppgiften och hantera de överlapp som finns i den givna informationen. Vi låter en cirkel stå för ”män”, en för ”gifta” och en för ”arbetar mer än 50h”. De utanför cirkeln ”män” är alltså de svarande kvinnorna. Genom att börja längst in (gifta män som arbetar mer än 50h), så kan vi sedan successivt fylla i hur många som finns i varje område. Till sist kan vi addera de vi fått inom cirklarna och dra bort det antalet från de 180 svarande och få att 5 personer ligger utanför alla tre cirklarna. Vi kan nu besvara frågorna.



Antalet ogifta män respektive ogifta kvinnor som arbetar mer än 50 h/vecka hittar vi i den nedre cirkeln, utanför cirkeln ”gifta”, så det är 40 män respektive 20 kvinnor som tillhör den kategorin.

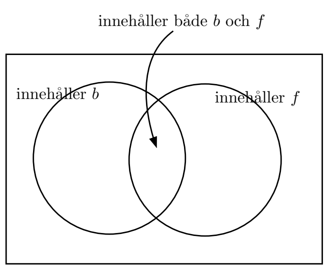
Kan man utifrån denna undersökning säga att fler ogifta män än ogifta kvinnor arbetar mer än 50 h/vecka? Nej, eftersom det var dubbelt så många män (120 st) som kvinnor (60 st) i undersökningen och vi har exakt samma förhållande (en faktor 2) mellan ogifta män och kvinnor som arbetar mer än 50 h/vecka. Slutsatsen ur denna undersökning skulle istället bli att det är lika vanligt för ogifta män och kvinnor att arbeta mer än 50 h/vecka.

Svar: Det är 40 ogifta män respektive 20 ogifta kvinnor som arbetar mer än 50 h/vecka. Eftersom antalet män i undersökningen är dubbelt så många som antalet kvinnor och vi har samma förhållande mellan de som arbetar mer än 50 h/vecka, så kan man här inte dra slutsatsen att fler ogifta män än kvinnor arbetar mer än 50 h/vecka.

5. Vi har $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

a) Antalet delmängder till A som innehåller elementet b *och* f kan vi räkna ut genom att utgå från att b och f redan valts och sedan för var och en av de övriga elementen välja om de ska vara med i delmängden eller ej. Då det är 4 övriga element och vi för var och en har 2 möjligheter, med eller inte med, så finns det totalt $2^4 = 16$ sådana delmängder enligt multiplikationsprincipen.

b) De delmängder som innehåller b *eller* f är de som innehåller b, innehåller f eller båda. Vi tar hjälp av ett venndiagram. De som innehåller b är $2^5 = 32$ stycken enligt samma metod som i a). De som innehåller f är på samma sätt 32 stycken. De som innehåller båda är 16 stycken enligt a).



Var god vänd

Vi lägger ihop antalet delmängder som innehåller b respektive f, men drar bort de som innehåller båda för att inte dubbelräkna dem, och får $32 + 32 - 16 = 48$. Det finns alltså 48 delmängder som innehåller b eller f.

Svar: a) 16 olika delmängder till A innehåller elementen b och f.
b) 48 olika delmängder till A innehåller elementet b eller elementet f.

6. ”Om solen gått ner och vi är trötta så slår vi läger. Om vi inte är trötta så slår vi inte läger. Vi har inte slagit läger. Alltså har solen inte gått ner.”

Låt p : ”solen har gått ner”, q : ”vi är trötta” samt r : ”vi slår läger”.

Slutledningen ovan blir då som satslogiskt uttryck:

$$(p \wedge q \to r) \wedge (\neg q \to \neg r) \wedge \neg r \;\Rightarrow\; \neg p$$

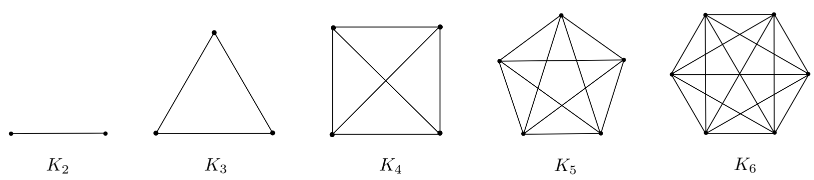
Denna slutledning är inte korrekt och vi väljer här att använda en sanningsvärdestabell för att visa att den inte är en tautologi. (Man kan också använda reduktionsmetoden för att vaska fram de sanningsvärden som ger ett motexempel.) I tabellen nedan står R för hela vänsterledet i slutledningen.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \to r$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \to \neg r$	R	$\neg p$	$R \to \neg p$
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Vi ser i sista kolumnen att vi har en 0:a på den rad där p är sann, men q och r falska. Alltså är inte implikationen en tautologi och slutledningen därmed inte korrekt. Den rad i tabellen som motsäger detta skulle översatt bli ”solen har gått ner, men vi är inte trötta och slår inte läger”, och vi ser att denna möjlighet gör alla förutsättningar sanna, men slutsatsen falsk.

Svar: Slutledningen blir på satslogisk form $(p \wedge q \to r) \wedge (\neg q \to \neg r) \wedge \neg r \;\Rightarrow\; \neg p$ och vi visar ovan att den inte är en korrekt slutledning.

7. Nedan visas den kompletta grafen K_n för $n = 2, 3, 4, 5, 6$.



Enligt sats 6.2 så har en graf en öppen eulerväg om precis två noder har udda grad och grafen har en sluten eulerväg om samtliga noder har jämn grad.

I en komplett graf så är varje nod förbunden med alla de andra, så alla noder har samma gradtal och noderna i K_n har gradtal $n - 1$ då de är förbundna med alla utom sig själv.

Var god vänd

För K_n där n är **jämn** kommer därför alla noder ha udda gradtal och därmed inte ha någon sluten eulerväg. I K_2 finns det precis två med udda grad, så den har en öppen eulerväg enligt satsen. Alla de övriga med jämnt n kommer ha fler än två udda och därför inte innehålla någon öppen eulerväg heller.

För K_n där n är **udda** kommer istället alla noder ha jämnt gradtal och då finns det enligt satsen ovan ingen öppen eulerväg, men alltid en sluten eulerväg.

Svar: För K_n där n är jämn finns varken öppen eller sluten eulerväg, bortsett från K_2 som har en öppen eulerväg. För K_n där n är udda finns ingen öppen eulerväg, men en sluten eulerväg.