Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
764G06 Diskret matematik och logik, 6 hp
2017-04-18

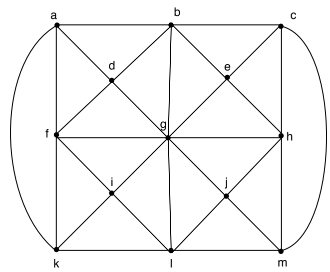
---

1. a) Summan av gradtalen är $3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 17 \cdot 1 = 53$,
men enligt handskakningslemmat är summan av gradtalen alltid 2 gånger antalet bågar och därmed alltid ett jämt tal, så det existerar ej en graf med precis dessa noder och gradtal.

   b) En funktion från A till B relaterar *varje* element i A till *precis ett* element i B, ej nödvändigt olika. För varje element i A finns det därför fyra möjligheter att välja bild i B, totalt $4^3 = 64$ möjligheter enligt multiplikationsprincipen. För en injektiv funktion ska dessutom bilderna i B vara olika så då finns $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ olika sådana funktioner.

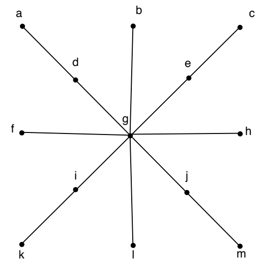
   Svar: a) Nej det existerar ej en sådan graf. Se motivering ovan.
   b) Finns 64 olika funktioner från A till B, varav 24 st är injektiva.

2. a) Enligt sats finns en öppen eulerväg om precis två noder har udda grad och det finns en sluten eulerväg om alla noder har jämn grad. Noderna b, f, h och l har alla grad 5 (udda!) så det finns varken en öppen eller en sluten eulerväg.



   b) En hamiltonväg är till exempel $a - d - f - i - k - l - j - m - h - g - e - c - b - a$.

   c) Ett spännande träd för en graf är en sammanhängande delgraf som innehåller alla noder i den ursrungliga grafen samt är cykelfri. Ett exempel på ett spännande träd för den ursprungliga grafen är grafen som visas intill.



   Svar: Se ovan.

3. De sju bokstäverna i ordet PÅSKÄGG kan omordnas på 7! olika sätt. Då det finns två G så får vi inte olika bokstavsföljder om G:na byter plats. Antalet *olika* bokstavsföljder med sju bokstäver är därför:

$$\frac{7!}{2} = \frac{5040}{2} = 2520 \text{ stycken.}$$

För att få antalet som inte innehåller GÅS räknar vi först ut hur många av bokstavsföljderna som innehåller GÅS och drar sedan bort det antalet från det totala. De som blir kvar är då de som inte innehåller GÅS.

var god vänd

Antalet som innehåller GÅS kan vi få genom att tänka att vi skriver GÅS på en lapp och bokstäverna P, K, Ä och G på separata lappar. Vi får 5 lappar och dessa kan då omordnas på $5! = 120$ olika sätt. Antalet följder som innehåller GÅS är alltså 120 stycken. (Då det ena G:et står ihop med GÅS dubbelräknas inga följder på grund av G:na, så vi ska inte dividera med 2 här.) Vi tar det totala antalet och drar bort dessa och får:

$2520 - 120 = 2400$ stycken följder som inte innehåller GÅS.

Svar: Det går att bilda $\dfrac{7!}{2} = 2520$ olika bokstavsföljder med bokstäverna i ordet PÅSKÄGG och 2400 av dessa innehåller inte följden GÅS.

4. Undersökning med venndiagram visar att a) inte är sann för alla mängder, medan b) är det. Vi ger ett motexempel i a) och ett bevis för b) nedan.

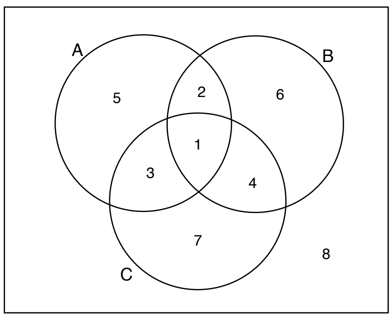
   a) Tag grundmängden $\mathcal{U} = \{1, 2\}$ och låt $A = B = \{1\}$ samt $C = \{2\}$. Då har vi

VL:	HL:
$A^c = \{2\}$	$A \cup B = \{1\}$
$A^c \cap B = \emptyset$	$C^c = \{1\}$
$A \cap C = \emptyset$	$A \cap C^c = \{1\}$
$(A \cap B \cap C^c) = \{1\}$	HL=$(A \cup B) \setminus (A \cap C^c) = \emptyset$
VL=$(A^c \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) = \{1\}$	

   Då VL$\neq$HL i exemplet ovan så har vi visat att likheten inte gäller för alla mängder A, B och C.

   b) Vi använder ett numrerat venndiagram och går igenom operationerna i vänsterled och högerled var för sig och ser vilka områden de svarar mot.

VL:	HL:
A: 1,2,3,5	A: 1,2,3,5
B: 1,2,4,6	C: 1,3,4,7
$A \setminus B$: 3,5	$A \setminus C$: 2,5
C: 1,3,4,7	B: 1,2,4,6
VL=$(A \setminus B) \setminus C$: 5	HL=$(A \setminus C) \setminus B$: 5



   Då VL och HL svarar mot samma område i det numrerade venndiagrammet ovan har vi visat att likheten gäller för alla mängder A, B och C.

Svar: Likheten i a) gäller ej, medan likheten i b) gör det. Se motexempel respektive bevis ovan.

5. Vi kan använda någon av metoderna deduktion, reduktion eller sanningsvärdestabell för att utvärdera slutledningarna. Vi väljer i a) att använda sanningsvärdestabell då det bara är två satsparametrar, vilket ger fyra rader i sanningsvärdestabellen. I b) använder vi deduktion för att bevisa att slutledningen faktiskt är korrekt.

var god vänd

a) För slutledningen $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \;\Rightarrow\; p$ får vi sanningsvärdestabellen:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	p	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \to p$
1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1

Vi ser i den sista kolumnen att uttrycket som svarar mot slutledningen ej är en tautologi då den ej är sann på tredje raden. Slutledningen är alltså *ej* korrekt.

b) Vi visar att slutledningen är korrekt med hjälp av deduktion.

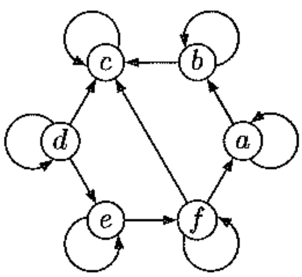
$$p \wedge (\neg r \to q \wedge s) \wedge (r \to \neg p) \;\Rightarrow\; s$$

1.	p	Förutsättning
2.	$\neg(\neg p)$	1 och dubbel negation.
3.	$r \to \neg p$	Förutsättning
4.	$\neg r$	2, 3 och Modus tollens.
5.	$\neg r \to q \wedge s$	Förutsättning
6.	$q \wedge s$	4, 5 och Modus ponens.
7.	s	6 och konjuktiv förenkling.

Vi har härlett s ur förutsättningarna och alltså är denna en korrekt slutsats ur dessa, det vill säga slutledningen är korrekt.

Svar: a) Slutledning ej korrekt, se sanningsvärdestabell ovan.
b) Slutledning korrekt, se deduktion ovan.

6. Relationsgrafen och relationsmatrisen ges nedan.



$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

1) Reflexiv? Ja, det finns öglor på alla noder (endast 1:or på diagonalen i matrisen).

2) Symmetrisk? Nej, det finns förbindelser mellan två olika element som inte är dubbelriktade. (Ingen är det, men det räcker att konstatera att en inte är det för att säga att den inte är symmetrisk.)

3) Antisymmetrisk? Ja, alla förbindelser är enkelriktade.

4) Transitiv? Nej, vi har t ex $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}c$, men $a\not\mathcal{R}c$.

En relation är en ekvivalensrelation om den är reflexiv, symmetrisk och transitiv, men då den varken är symmetrisk eller transitiv så är den inte en ekvivalensrelation.

En relation är en partialordning om den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, men då den ej är transitiv så är den inte en partialordning.

Svar: Se ovan.

7. I K_n, den fullständiga grafen med n noder, är alla noder förbundna med varandra. Vi kan därför bilda cykler genom starta i någon nod (n st) och sedan gå till valfri nod ($n-1$ st möjligheter) och sedan vidare till någon av de $n-2$ noder vi ej ännu besökt, o s v. Från den sista besökta noden kan vi gå tillbaka till den första eftersom alla noder är förbundna. På detta sätt kan vi konstruera en sluten väg som besöker varje nod en gång, d v s en hamiltoncykel.

   Vi får enligt multiplikationsprincipen $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ olika sätt att göra detta på. Då har vi räknat varje cykel från varje startnod, men samma cykel kan startas från n olika noder så vi har fått med varje cykel n gånger. Vi dividerar med n och får $(n-1)!$ olika hamiltoncykler.

   Svar: K_n har $(n-1)!$ olika hamiltoncykler.