Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Svar med lösningsanvisningar till tentamen 764G06 Diskret matematik och logik, 6 hp 2017-01-10

---

1. a) För träd gäller $N = B + 1$, det vill säga om antalet noder är 27 så är antalet bågar 26, så ett ett sådant träd finns.

   b) Nej. Summan av gradtalen är $4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 31$, men enligt handskakningslemmat är summan av gradtalen alltid jämn. En sådan graf kan därför inte finnas.

   c) Det finns två noder med udda gradtal, den av grad 3 och den av grad 5. Enligt sats 6.2 så finns det en sluten eulerväg precis då alla noder har jämnt gradtal och det finns en öppen eulerväg precis då två noder har udda grad. Alltså finns det en öppen eulerväg, men ingen sluten eulerväg.

2. Vi använder en sanningsvärdestabell för att besvara frågorna.

p	q	r	$q \vee r$	S_1: $p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	S_2: $(p \wedge q) \vee r$	$S_1 \leftrightarrow S_2$	$S_1 \rightarrow S_2$	$S_2 \rightarrow S_1$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

S_1 är ej ekvivalent med S_2 då $S_1 \leftrightarrow S_2$ ej är en tautologi enligt ovanstående sanningsvärdestabell. Inte heller $S_2 \rightarrow S_1$ är en tautologi, så S_2 implicerar inte S_1. $S_1 \rightarrow S_2$ är dock en tautologi, så S_1 implicerar S_2.

Svar: S_1 och S_2 är inte logiskt ekvivalenta, men $S_1 \Rightarrow S_2$ är en logisk implikation. Se motivering ovan.

3. Vi delar upp problemet i två fall:

I) Cecilia och Moa är med och arrangerar vårutflykt:

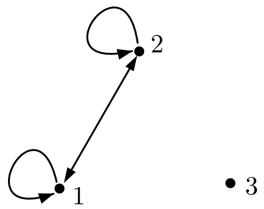
Det finns då 10 personer att välja bland för att hitta en tredje person. Totalt alltså 10 sätt att välja Cecilia, Moa och en tredje person.

II) Cecilia och Moa är inte med och arrangerar vårutflykt:

Då finns det 10 personer bland vilka vi ska välja 3 utan inbördes ordning, vilket ger $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.
Totalt 120+10=130 olika sätt att välja en grupp om tre som arrangerar vårutflykt.

Svar: Med givna villkor kan gruppen om 3 väljas ut på 130 olika sätt bland de 12.

4. $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ är en relation på $\mathcal{U} = \{1,2,3\}$. Relationsgrafen visas i figuren till höger. Vi går igenom de fyra egenskaperna samt kommenterar vad som minst behöver läggas till eller tas bort för att $\mathcal{R}$ ska uppfylla en egenskap den inte uppfyller i sin ursprungliga form.



Reflexiv? Nej, då inte $(3,3) \in \mathcal{R}$. Om (3,3) läggs till så skulle den bli reflexiv.

Symmetrisk? Ja, då alla pilar i grafen är dubbelriktade.

Antisymetrisk? Nej, då inte alla pilar är dubbelriktade. Om en av $(1,2)$ eller $(2,1)$ tas bort så blir $\mathcal{R}$ antisymmetrisk.

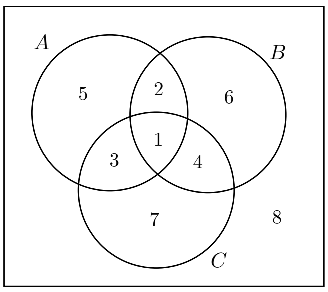
Transitiv? Ja, då alla indirekt relaterade element också är direkt relaterade.

En relation är en ekvivalensrelation om den är reflexiv, symmetrisk och transitiv, men då $\mathcal{R}$ ej är reflexiv så är den inte en ekvivalensrelation på $\mathcal{U}$.

Svar: Se ovan.

5. a) $A \cap (B \setminus C)^c = (B^c \cap A) \cup (A \cap C)$

Likheten gäller och vi bevisar det nedan med hjälp av ett numrerat venndiagram:



VL:
A: 1,2,3,5
B: 1,2,4,6
C: 1,3,4,7
$B \setminus C$: 2,6
$(B \setminus C)^c$: 1,3,4,5,7,8
VL=$A \cap (B \setminus C)^c$: 1,3,5

HL:
A: 1,2,3,5
B: 1,2,4,6
C: 1,3,4,7
B^c: 3,5,7,8
$B^c \cap A$: 3,5
$A \cap C$: 1,3
HL=$(B^c \cap A) \cup (A \cap C)$: 1,3,5

Då vänster- och högerled svarar mot samma områden ovan gäller likheten för alla mängder A, B och C.

b) $A^c \cap (B \cup C) = (A^c \cap B) \cap (A^c \cap C)$

Likheten gäller inte och vi anger ett motexempel:

Låt $\mathcal{U} = \{a,b,c\}$ och låt $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ och $C = \{a\}$. Då är

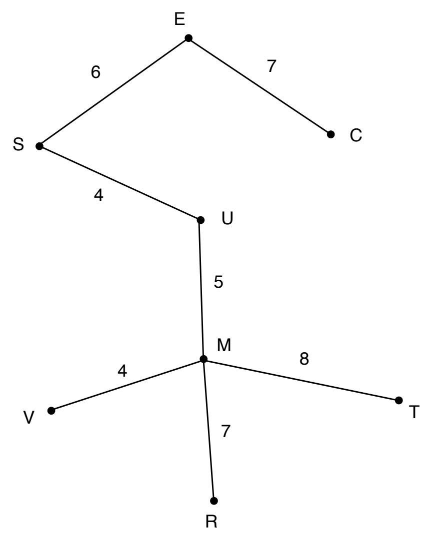
VL $= A^c \cap (B \cup C) = \{b,c\} \cap \{a,b\} = \{b\}$,

HL $= (A^c \cap B) \cap (A^c \cap C) = (\{b,c\} \cap \{b\}) \cap (\{b,c\} \cap \{a\}) = \{b\} \cap \emptyset = \emptyset$.

Då VL och HL inte är lika i detta exempel så gäller inte likheten för alla mängder A, B och C.

Svar: Likheten i a) gäller, men inte den i b). Se bevis respektive motexempel ovan.

6. a) Vi använder Kruskals algoritm. Med 8 noder ska vi ha 7 bågar i det uppspännande trädet. Vi väljer bågarna (i tur och ordning enligt algoritmen) V-M (4), U-S (4), U-M (5), S-E (6). Alla dessa fyra billigaste bågar kan väljas utan någon cykel bildas. Nästa billigaste är E-C och U-C och båda har kostnad 7. Väljer vi båda fås en cykel. Vi väljer E-C. Även M-R har kostnad 7 och vi kan välja den utan att cykel bildas. Nu finns två bågar av kostnad 8. V-R skapar cykel, men inte M-T, så vi väljer den. Vi har nu 7 bågar och vi är klara. Kostnaden för det billigaste spännande trädet är 41.



b) För träd gäller att $N = B + 1$ vilket också kan skrivas som $B = N - 1$. Vi ska alltså ha $|N(G)| - 1$ bågar kvar i det uppspännande trädet. Vi har $|B(G)|$ från början, så alltså är det $|B(G)| - (|N(G)| - 1) = |B(G)| - |N(G)| + 1$ som inte tas med i trädet.

Svar: a) Se billigaste spännande träd ovan. Kostnaden är 41. (EC kan bytas mot UC.)
b) Antalet bågar i G som inte ska tas med i trädet är $|B(G)| - |N(G)| + 1$.

7.

$$(A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C) \ \Rightarrow\ A = B$$

Låt x vara ett godtycligt element i grundmängden $\mathcal{U}$ i vilken A, B och C är delmängder. Vi formulerar satserna:

p : x tillhör A.
q : x tillhör B.
r : x tillhör C.

Implikationen ovan är då ekvivalent med att det för varje $x \in \mathcal{U}$ gäller att:

$$(p \wedge r \leftrightarrow q \wedge r) \wedge (p \vee r \leftrightarrow q \vee r) \ \Rightarrow\ p \leftrightarrow q$$

Vi kan visa att detta är en korrekt logisk implikation med hjälp av sanningsvärdestabell, reduktionsmetoden eller deduktion. Vi väljer här att visa det med reduktion.

1) Antag att slutledningen inte gäller, det vill säga att förutsättningarna är sanna, men slutsatsen falsk.

2) Att $p \leftrightarrow q$ falsk ger två möjligheter:

I) p sann, q falsk *eller* II) p falsk, q sann.

Vi visar att båda leder till en motsägelse:

I.3) p sann ger $p \vee r$ sann vilket medför att $q \vee r$ sann då andra förutsättningen är sann.

I.4) Eftersom q falsk måste då r vara sann då $q \vee r$ är sann.

I.5) Med p sann, q falsk, r sann insatt i första förutsättningen ger då $p \wedge r$ sann medan $q \wedge r$ falsk. Detta ger en motsägelse!

II.3) q sann ger $q \vee r$ sann vilket medför $p \vee r$ sann då andra förutsättning är sann.

II.4) Då p är falsk måste r vara sann då $p \vee r$ är sann.

II.5) Med p falsk, q sann, r sann insatt i första förutsättningen ger då $p \wedge r$ falsk medan $q \wedge r$ sann. Detta ger en motsägelse!

Antagandet att förutsättningarna sanna men slutsatsen falsk leder i båda fallen till en motsägelse. Alltså är slutledningen korrekt. Slutledningen gäller för varje $x \in \mathcal{U}$ och oberoende av vilka mängder A, B och C och grundmängd $\mathcal{U}$ vi har. Vi har alltså visat att den ursprungliga implikationen gäller för alla mängder A, B och C.