Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

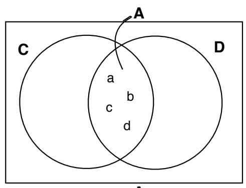
Lösningar till tentamen
764G06 Diskret matematik och logik, 6 hp
2016-11-04

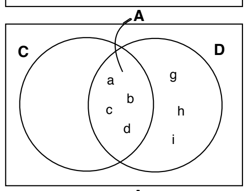
---

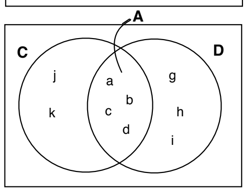
1. a) Vi har grundmängden $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$. Då denna har 11 element kan vi bilda delmängder genom att för var och en av dessa välja om de ska ska vara med eller inte. Detta ger 11 val med 2 möjligheter i varje och enligt multiplikationsprincipen får vi då $2^{11} = 2048$ olika delmängder till $\mathcal{U}$.

   b) $A = \{a, b, c, d\}$ och $A \subseteq B \subseteq \mathcal{U}$. Då B ska vara en delmängd till $\mathcal{U}$ så kan den som mest vara hela $\mathcal{U}$, det vill säga innehålla 11 element. Då A ska vara en delmängd till B så kan den som minst vara just A, det vill säga innehålla de fyra elementen A innehåller.

   c) Att $A = C \cap D$ ger oss venndiagrammet överst till höger. Vi noterar att elementen a, b, c och d är de enda som mängderna har gemensamma. $D \setminus A = \{g, h, i\}$ innebär då att dessa element ligger bara i D, d v s området längst till höger i venndiagrammet (se bild 2). Att $A = C \cap D$ innebär också att $A \subseteq C$ så $A \cup C = C$ vilket ger att det tredje sambandet $(A \cup C) \setminus D = C \setminus D = \{j, k\}$. j och k är alltså de element som bara tillhör C, d v s området längst till vänster i venndiagrammet. Vi har alltså $C = \{a, b, c, d, j, k\}$ och $D = \{a, b, c, d, g, h, i\}$.



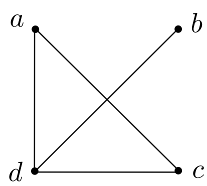




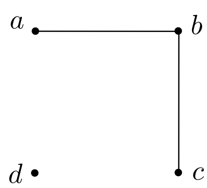
Svar: a) $\mathcal{U}$ har $2^{11} = 2048$ delmängder.
b) B har minst 4 element $(= A)$ och som mest 11 element $(= \mathcal{U})$.
c) $C = \{a, b, c, d, j, k\}$ och $D = \{a, b, c, d, g, h, i\}$

2. a) Då gradtalen för nod a och c är 2 (jämna) och gradtalen för nod b och d är 1 respektive 3 (udda) så har vi precis två noder som har udda grad. Enligt sats 6.2 har vi då en öppen eulerväg. Noderna b och d blir start- respektive slutnod. Ett exempel på en öppen eulerväg är $b - d - c - a - d$.

   Då alla noder inte har jämnt gradtal så har grafen ingen sluten eulerväg enligt sats 6.2.



   b) I den nedre grafen intill visas komplementgrafen till den ovan. Ett träd är en sammanhängande graf utan cykler. Komplementgrafen här har visserligen inga cykler, men den är inte sammanhängande och är därför inte ett träd. Noden d blir en egen komponent.

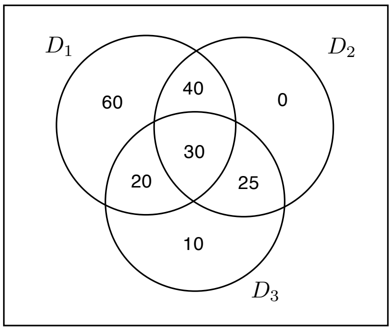


var god vänd

c) Vi kan bilda $4 \cdot 4 = 16$ olika relaterade par (från A till A). För var och en av dessa kan vi välja om de ska vara med eller ej i en viss relation. Det ger 16 val med två möjligheter i varje. Multiplikationsprincipen ger 2^{16} olika relationer på A.

Svar: Se ovan.

3. Med hjälp av ett venndiagram kan vi strukturera informationen i uppgiften. Med start i det mittersta området, de 30 kunder som finns i alla tre databaserna, kan vi successivt räkna ut hur många som finns i varje område i venndiagrammet. Vi får resultatet som vissas intill och kan nu besvarar frågorna.



Totala antalet kunder är summan av alla delområden inom cirklarna, d v s 60+40+30+20+10+25+0=185. Det finns alltså totalt 185 kunder i de tre databaserna.

Antalet som inte finns i D_2 är det totala antalet minus de som finns i D_2, det vill säga $185 - 95 = 90$ kunder.

Svar: 185 kunder finns totalt i de tre databaserna och 90 av dessa finns inte i D_2.

4. a) Med en sanningsvärdestabell kan vi avgöra huruvida de satslogiska uttrycken S_1: $\neg(p \leftrightarrow q)$ respektive S_2: $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ är logiskt ekvivalenta.

p	q	$p \leftrightarrow q$	S_1: $\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	S_2: $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0

Vi ser att uttrycken S_1 och S_2 har samma sanningsvärden på samtliga rader och de är därmed ekvivalenta. (Kan också visas med omskrivning av det ena uttrycket till det andra med logiska ekvivalenser.)

b) För träd gäller enligt sats 6.3 att $N = B + 1$, där N är antalet noder och B är antalet bågar. Om vi låter x representera antalet löv i grafen så är antalet noder i denna $N = 7 + x$.

Antalet bågar kan vi får ur gradtalen samt handskakningslemmat: ”Summan av gradtalen i en graf är två gånger antalet bågar”. Ur detta fås:

$$B = \frac{\text{Summan av gradtalen}}{2} = \frac{7 \cdot 4 + 1 \cdot x}{2} = \frac{28 + x}{2}.$$

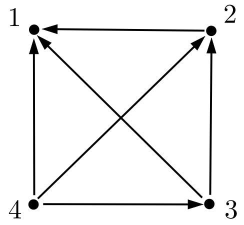
Både N och B är nu uttryckta i x och insatt i sambandet för träd får vi:

$$N = B + 1 \;\Leftrightarrow\; 7 + x = \frac{28 + x}{2} + 1 \;\Leftrightarrow\; 14 + 2x = 28 + x + 2 \;\Leftrightarrow$$

$14 + 2x = 30 + x \;\Leftrightarrow\; 14 + x = 30 \;\Leftrightarrow\; x = 16$. Grafen har alltså 16 löv.

Svar: a) Ja, uttrycken är logiskt ekvivalenta. Se ovan.
b) Grafen har 16 löv.

5. På mängden $B = \{1, 2, 3, 4\}$ definierar vi relationen $>$ (större än). Två element a och b i mängden är alltså relaterade om $a > b$. Nedan finns relationsgraf och relationsmatris.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Relationen är *ej reflexiv* då elementen inte har loopar i grafen. Ett tal är aldrig större än sig självt. (Vi har inte 1:or på diagonalen i relationsmatrisen.)

- Relationen är *ej symmetrisk* då inte alla pilar i grafen är dubbelriktade. Här är faktiskt inga dubbelriktade. (Matrisen är inte symmetrisk runt diagonalen.)

- Relationen är *antisymmetrisk* då samtliga pilar i grafen är enkelriktade. (Varje 1:a i matrisen under diagonalen svarar mot en 0:a på motsvarande plats över diagonalen.)

- Relationen är *transitiv*, för om $a > b$ och $b > c$ så är ju $a > b > c$ och därmed alltid $a > c$ för alla sådana a, b och c som tillhör B. (Vi kan också motivera att varje tvåstegsförbindelse i grafen, via något annat element, också har en direkt förbindelse.)

Svar: Relationsgraf och relationsmatris visas ovan. Relationen är ej reflexiv eller symmetrisk, men är antisymmetrisk och transitiv. Se motiveringar ovan.

6. Vi formulera utsagan nedan som ett satslogiskt uttryck.

Om brottet begicks på dagen så finns det många vittnen. Om brottet begicks av Ville Vessla så skedde det på dagen. Det finns inte många vittnen till brottet. Alltså begicks inte brottet av Ville Vessla (säger Ture Sventon).

Låt p: brottet begicks på dagen, q: det finns många vittnen till brottet,
r: brottet begicks av Ville Vessla.

Slutledningen får då den satslogiska formen:

$$(p \to q) \land (r \to p) \land \neg q \;\Rightarrow\; \neg r$$

Vi visar att slutledningen är korrekt med hjälp av deduktion:

1.	$\neg q$	Förutsättning
2.	$p \to q$	Förutsättning
3.	$\neg p$	1, 2 och Modus Tollens.
4.	$r \to p$	Förutsättning
5.	$\neg r$	3, 4 och Modus Tollens.

Vi har härlett $\neg r$ ur förutsättningarna. Slutsaten att brottet inte begicks av Ville Vessla är korrekt ur dessa förutsättningar.

Svar: Visst hade Ture Sventon rätt. Att brottet inte begicks av Ville Vessla är en korrekt slutsats ur förutsättningarna. Se satslogiskt uttryck och härledning ovan.

7. Vi ska välja fem kort ur kortleken så att vi får en kåk, det vill säga tre kort ur en valör och två kort ur en annan.

   - Välj först valör för de tre korten. Det kan göras på 13 sätt.

   - Dra nu tre av de fyra korten i denna valör. Det kan göras på $\binom{4}{3}$ sätt.

   - Välj nu valör för de två korten. Det kan göras på 12 sätt. (Den valör som valdes ovan kan inte väljas igen.)

   - Dra två av fyra kort i denna valör. Det kan göras på $\binom{4}{2}$ sätt.

   Totalt fås då enligt multiplikationsprincipen:

   $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 13 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 12 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$ olika sätt att bilda kåk.

   Svar: Det finns 3744 olika sätt att bilda kåk med korten i kortleken.