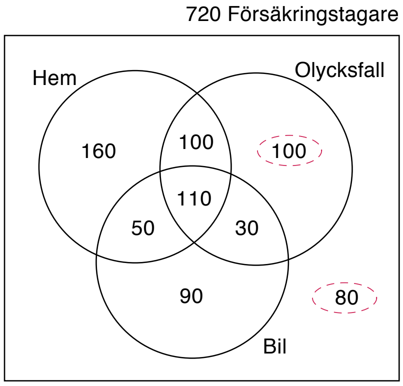
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
764G06 Diskret matematik och logik, 6 hp
2016-03-31

---

1. För att strukturera informationen tar vi hjälp av ett venndiagram. Med informationen i uppgiften kan vi successivt, inifrån och ut, räkna ut hur många som finns i varje område. Sist kan vi summera alla vi fått inom cirklarna och se att de är: $160 + 100 + 110 + 50 + 90 + 30 + 100 = 640$ st. Då de är 720 försäkrade kunder totalt så är det alltså $720 - 640 = 80$ stycken utanför de tre cirklarna. Vi får resultatet intill. Nu kan vi besvara frågorna:



Hur många har endast olycksfallsförsäkring?
Det är alltså de som ligger i cirkeln olycksfall, men inte i någon av de andra cirklarna. Vi ser att det är 100 kunder i figuren (se markering).

Hur många har ingen av de tre försäkringstyperna?
Det är de som är helt utanför cirklarna. Vi ser att det är 80 kunder som inte har någon av de tre försäkringstyperna (se markering).

Svar: a) Det är 100 kunder som endast har olycksfallsförsäkring.
b) 80 av de 720 kunderna har ingen av de tre försäkringstyperna.

2. a) En tautologi är ett uttryck som är *sant* på alla rader i sanningsvärdestabellen (eller sant för alla kombinationer av sanningsvärden på de ingående satsparametrarna). Uttrycket $p \vee \neg p$ är en tautologi.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

En kontradiktion är ett uttryck som är *falskt* på alla rader i sanningsvärdestabellen (eller falskt för alla kombinationer av sanningsvärden på de ingående satsparametrarna). Uttrycket $p \wedge \neg p$ är en kontradiktion.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

Till höger visas sanningsvärdestabellen för de båda uttrycken.

b) Vi utgår alltså från att $\neg q \to (\neg p \to r)$ är falsk. En implikation är bara falsk på en rad i sanningsvärdestabellen nämligen då ”sant” implicerar ”falskt” . Att $\neg q \to (\neg p \to r)$ är falskt innebär därmed att $\neg q$ är falsk samtidigt som $\neg p \to r$ är falsk. Detta innebär i sin tur att q är falsk samt att $\neg p$ är sann och r falsk, d v s då p, q och r är falska.

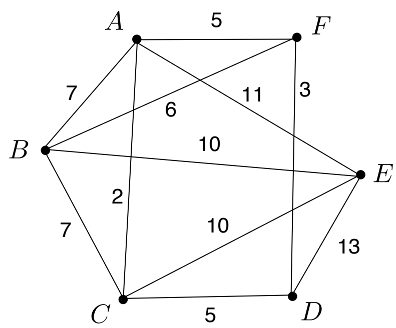
Vad får $p \to (q \wedge r)$ då för sanningsvärde? Då p falsk så blir implikationen sann oavsett värdet på q och r. $q \wedge r$ är här falsk.

var god vänd

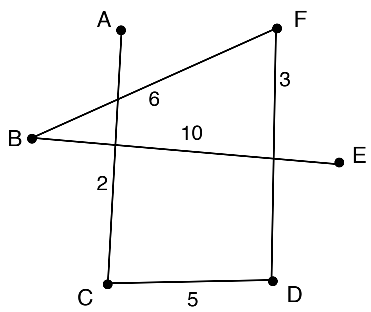
Uppgiften kan också lösas med sanningsvärdestabell där man hittar den rad där det första uttrycket är falskt och läser av det andra uttryckets värde på den raden.

Svar: a) Se exempel på tautologi och kontradiktion ovan.
b) Uttrycket $p \to (q \land r)$ blir sant då $\neg q \to (\neg p \to r)$ är falsk.

3. a) Gradtalen för nod D och nod F är udda (båda har grad 3), övriga noder har jämn grad. Enligt sats 6.2 så finns en öppen eulerväg precis då två noder har udda grad. En sluten euelerväg finns enligt samma sats endast då alla noder har jämn grad. I denna graf finns alltså ingen sluten eulerväg, men väl en öppen, t ex $F{-}A{-}B{-}C{-}D{-}E{-}A{-}C{-}E{-}B{-}F{-}D$.



b) Vi använder Kruskals algoritm för att generera ett billigaste träd. Börja med noderna utan några bågar. Vi väljer den billigaste bågen, AC, kostnad 2. Nästa billigaste bland de återstående är DF, kostnad 3. Denna väljs också då ingen cykel bildas. Nästa billigaste bland de återstående är CD och AF, båda har kostnad 5. Väljs båda så bildas cykel, så endast en av dem kan väljas. Vi väljer CD.



Nästa billigaste bland de återstående är BF, kostnad 6. Denna väljs då ingen cykel bildas. Nästa billigaste bland de återstående är AB och BC, båda kostnad 7, men båda bildar cykel med de tidigare så ingen av dem väljs. Nästa billigaste bland de återstående är BE och CE, båda kostnad 10. En av dem kan väljas utan att cykel bildas med de tidigare. Vi väljer BE.
Vi har nu valt 5 bågar och då vi har 6 noder har vi fått ett spännande träd, det billigaste, enligt Kruskals algoritm.
Kostnaden blir 2+3+5+6+10=26.

Svar:
a) Grafen har en öppen eulerväg, men ej en sluten, då precis två noder har udda gradtal.
b) Ett billigaste spännande träd finns ovan med en kostnad på 26. (CD kan bytas mot AF, båda har kostnad 5. På motsvarande sätt kan BE bytas mot CE, båda har kostnad 10.)

4. a) Elementet 3 ska med i alla och 5 ska inte vara med i någon. För de övriga 8 elementen har vi de två möjligheterna med eller inte med, så vi kan bilda delmängder på $2^8 = 256$ sätt, enligt multplikationsprincipen.

b) Varje element i $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ska ha en bild i $C = \{3, 4, 5\}$, men dessa behöver inte vara olika, så det finns 3 möjligheter för varje element i B, alltså $3^4 = 81$ olika funktioner, enligt multiplikationsprincipen.

var god vänd

c) Varje element i B (fyra st) kan relateras till alla i C (3 st), d v s $4 \cdot 3 = 12$ par att välja bland. För varje par finns möjligheten med eller inte med när vi bildar olika relationer, så totalt finns $2^{12} = 4096$ olika relationer från B till C.

Svar:

a) $2^8 = 256$ delmängder som innehåller 3 men inte 5.

b) $3^4 = 81$ olika funktioner från B till C.

c) $2^{12} = 4096$ olika relationer från B till C.

5. a) För en graf som är ett träd gäller att $N = B + 1$, där N är antalet noder och B är antalet bågar. Om antalet löv, det vill säga noder av grad 1, är x st, så finns det $N = 7 + x$ stycken noder.

Enligt hadnskakningslemmat så är summan av gradtalen två gånger antalet bågar, så antalet bågar B kan alltså beräknas ur gradtalen enligt

$$B = \frac{\text{summan av gradtalen}}{2} = \frac{7 \cdot 3 + 1 \cdot x}{2} = \frac{21 + x}{2}.$$

Uttrycken för N och B kan nu sättas in i den första ekvationen för träd, vilket ger:

$$N = B + 1 \;\Leftrightarrow\; 7 + x = \tfrac{21+x}{2} + 1 \;\Leftrightarrow\; 6 + x = \tfrac{21+x}{2} \;\Leftrightarrow\; 12 + 2x = 21 + x \;\Leftrightarrow$$

$$12 + x = 21 \;\Leftrightarrow\; x = 21 - 12 = 9 \;\Leftrightarrow\; x = 9.$$

Antalet löv i grafen är alltså 9 stycken.

b) En enkel graf med 8 noder kan som mest innehålla $\frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$ bågar. (Då har vi den kompletta grafen K_8.) Varje nod (8 st) kan nämligen vara förbunden med varje annan nod (7st) och varje båge ska bara räknas en gång. Enkla grafer har ej loopar eller multipla bågar.

Då 28 bågar är mindre än de 30 efterfrågade så finns det ingen enkel graf med 8 noder och 30 bågar.

Svar:

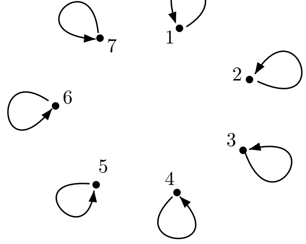
a) Grafen måste innehålla 9 st löv.

b) Nej det finns ingen enkel graf med åtta noder och 30 bågar. Se motivering ovan.

6. Vi har mängden $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ och relationen "lika med" $(=)$ på A, det vill säga x är relaterad till y om $x = y$, för $x, y \in A$.

Realtionsmatris och relationsgraf för relationen "$=$" anges nedan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



var god vänd

Relationen är:

-reflexiv då $x = x$ för alla $x \in A$ (alternativt att alla element har loop eller alla diagonalelement i relationsmatrisen är 1:or).

-symmetrisk för om $x = y$ så är ju alltid $y = x$, för alla x, $y \in A$. (Alternativt att relationsmatrisen är symmetrisk.)

-antisymmetrisk för om $x \neq y$ och $x = y$ så är $y \neq x$. Denna implikation (om... så...) blir uppfylld genom att förutsättningen aldrig uppfylls, det vill säga förutsättningen $x \neq y$ och $x = y$ är falsk för alla element i A och därmed är implikationen alltid sann. Relationen är alltså antisymmetrisk.

-transitiv för om $x = y$ och $y = z$ så är ju alltid $x = z$, för alla x, y, z i A.

Relationen uppfyller alltså alla fyra egenskaperna! (Att den kan vara både symmetrisk och antisymmetrisk är värt att notera och beror på avsaknaden av bågar mellan elementen.) Då relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv så är den en partialordning. Då relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är den också en ekvivalensrelation. Ekvivalensklasserna är [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Svar: Se ovan.

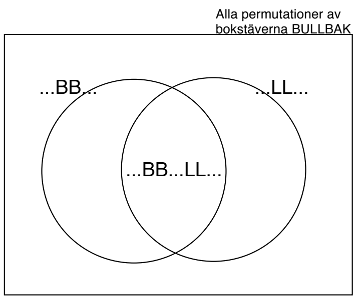
Ordet BULLBAK innehåller två B och två L. Det finns 7! sätt att omordna de 7 bokstäverna, men om vi byter plats på B:na respektive L:n så får vi samma bokstavsföljd. Därför finns det $\frac{7!}{2 \cdot 2} = 1260$ *olika* följder med dessa 7 bokstäver.

Vi måste nu dra bort de som har två likadana bokstäver intill varandra. Det kan vara två B, två L samt både två B och två L intill varandra. Vi delar upp i fall.

I) Antalet som innehåller BB någonstans i följden.
Om B:na "limmas ihop" fås 6 objekt som kan permuteras, men här finns två L som kan byta plats vilket inte ger olika följder. Vi får $\frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360$ olika följder.

II) Antalet som innehåller LL någonstans i följden.
Om L:n "limmas ihop" fås 6 objekt som kan permuteras, men här finns två B som kan byta plats. Precis som i fallet ovan får vi 360 olika följder.

III) Antalet som innehåller BB och LL.
De följder som innehåller både BB och LL någonstans i följden finns med i båda fallen ovan. Om både BB och LL sätts ihop har vi 5 objekt att permutera och nu finns inga dubletter, alla dessa blir olika, så vi får $5! = 120$ följder.



Antalet följder som inte innehåller två likadana bokstäver intill varandra blir då 1260-(360+360-120)=660 st.

Svar: Det finns 660 olika följder med de sju bokstäverna i ordet BULLBAK där inte två likadana bokstäver står intill varandra.