Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
764G06 Diskret matematik och logik, 6 hp
2016-01-08

---

1. $A = \{a, b, c, d\}$ och $B = \{1, 2, 3\}$. Vi har relationerna:

   a) $\mathcal{R}_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

   b) $\mathcal{R}_2 = \{(b, 1), (a, 3), (c, 1), (d, 2), (c, 2)\}$

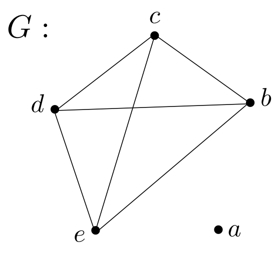
   c) $\mathcal{R}_3 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 2), (d, 2)\}$

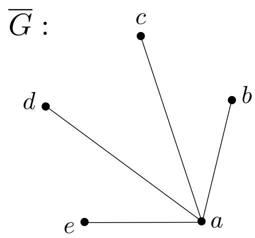
   Relationen $\mathcal{R}_1$ är en relation **från** B **till** A, så den är inte en relation från A till B. Både $\mathcal{R}_2$ och $\mathcal{R}_3$ är relationer från A till B då det första elementet i varje par finns i A och det andra elementet finns i B.

   $\mathcal{R}_2$ är dock inte en funktion då c har två olika bilder i B. (1 och 2). $\mathcal{R}_3$ är en funktion då varje element i A har precis en bild i B. (Dessa behöver dock inte vara olika.)

   Svar: $\mathcal{R}_1$ är ej en relation från A till B, men $\mathcal{R}_2$ och $\mathcal{R}_3$ är det. $\mathcal{R}_3$ är dessutom en funktion. Se motiveringar ovan.

2. Grafen G på nodmängden $\{a, b, c, d, e\}$ visas intill.

   a) Komplementgrafen till G består av samma noder, men innehåller de bågar som inte finns i G. Komplementgrafen betecknas $\overline{G}$ och finns till höger nedan.

   b) En komplett graf är en enkel graf där alla par av noder har en båge mellan sig. Ingen av dessa grafer är komplett då det i båda finns noder som inte har en båge mellan sig, t ex saknas $a - b$ i G och $b - c$ i $\overline{G}$. (Dessutom är komplementgrafen till en komplett graf den tomma grafen, d v s noder utan bågar.)

   c) G är ej ett träd då den varken är sammanhängande eller cykelfri. Däremot är $\overline{G}$ ett träd då den just är sammanhängande och saknar cykler. $\overline{G}$ har 4 st löv, nämligen b, c, d och e då dessa har gradtal 1.

   Svar: Se ovan.

3. Låt S_1: $p \to (q \to r)$ och S_2: $(p \to q) \to r$. Vi får följande sanningsvärdestabell:

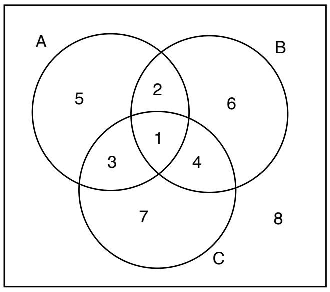
p	q	r	$(q \to r)$	S_1 $p \to (q \to r)$	$(p \to q)$	r	S_2 $(p \to q) \to r$	$S_1 \Rightarrow S_2$	$S_2 \Rightarrow S_1$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1

Om vi jämför kolumnerna för S_1 och S_2 i sanningsvärdestabellen så ser vi att de inte är logiskt ekvivalenta. På raden där p och r är falska och q sann så är S_1 sann, men S_2 falsk.

I de två sista kolumnerna ser vi att $S_1 \Rightarrow S_2$ inte är en tautologi, medan $S_2 \Rightarrow S_1$ är en tautologi då den endast består av 1:or. Alltså implicerar S_1 inte S_2, medan S_2 logiskt implicerar S_1. (Så snart S_2 är sann så är alltid S_1 det, men den omvända riktningen gäller inte.)

Svar: Sanningsvärdestabell finns ovan. De är ej logiskt ekvivalenta. S_2 implicerar S_1, men S_1 implicerar inte S_2.

4. a) Vi bevisar likheten $(A \cap B)^c \cap C = (C \cap A^c) \cup (B^c \cap C)$ med hjälp av numrerat venndiagram:



VL:	HL:
A: 1, 2, 3, 5	A^c: 4,6,7,8
B: 1, 2, 4, 6	$C \cap A^c$: 4,7
$A \cap B$: 1,2	B^c: 3,5,7,8
$(A \cap B)^c$: 3,4,5,6,7,8	$B^c \cap C$: 3,7
C: 1, 3, 4, 7	HL=$(C \cap A^c) \cup (B^c \cap C)$: 3,4,7
VL=$(A \cap B)^c \cap C$: 3,4,7	

Då VL och HL svarar mot samma områden i venndiagrammet så gäller likheten för alla mängder A, B och C.

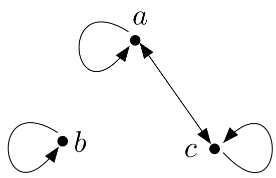
b) Likheten gäller ej. Tag t ex $A = \{a\}$ och $B = \{b\}$, $C = \{b\}$ och $\mathcal{U} = \{a, b\}$. Då är VL=$(A \setminus C^c) \cap B = (\{a\} \setminus \{a\}) \cap \{b\} = \emptyset \cap \{b\} = \emptyset$, medan HL=$(C \setminus B^c) = \{b\} \setminus \{a\} = \{b\}$.

Då VL och HL ger olika mängder i detta exempel så gäller inte likheten för alla mängder A, B och C.

c) Detta påstående är inte heller sant. B och C kan ju båda ha ytterligare element (utanför A) som inte är gemensamma och därför följer inte nödvändigt att $B \subseteq C$. Tag t ex $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ och $C = \{1, 3\}$. Då är $A \subseteq B$ och $A \subseteq C$, men $B \nsubseteq C$, då element 2 inte finns i C.

Svar: Påståendet a) gäller, men b) och c) gör inte det. Se bevis respektive motexempel ovan.

5. Relationsgrafen för relationen $\mathcal{R}$ på mängden $A = \{a, b, c\}$ visas intill. Vi har relationen $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$



Relationsmatris för relationen $\mathcal{R}$ anges nedanför grafen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relationen är:

reflexiv, då varje element relaterar till sig självt (alla element på diagonalen i relationsmatrisen är 1:or),

symmetrisk, då alla pilar mellan två olika element är dubbelriktade (relationsmatris symmetrisk runt diagonalen),

ej antisymmetrisk, då inte alla pilar är enkelriktade, t ex är både $a\mathcal{R}c$ och $c\mathcal{R}a$,

transitiv, då alla indirekt relaterade element också är direkt relaterade.

En relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv är en ekvivalensrelation, så $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation. Ekvivalensklasserna är $[a] = \{a, c\}$ och $[b] = \{b\}$, de två komponenterna i grafen.

En relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv är en partialordning, men då $\mathcal{R}$ ej är antisymmetrisk så är den ej en partialordning.

Svar: Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, men ej antisymmetrisk. Därmed är den en ekvivalensrelation, men ej en partialordning. Relationsmatris och motiveringar se ovan.

6. Slutledningen är korrekt och det kan visas med hjälp av deduktion, reduktionsmetoden eller sanningsvärdestabell. Vi väljer här att redovisa reduktionsmetoden.

$$(t \to \neg q) \wedge (s \vee p \to \neg r) \wedge t \wedge (\neg r \to q) \Rightarrow \neg s$$

t	$\to$	$\neg q$	s	$\vee$	p	$\to$	$\neg r$	t	$\neg r$	$\to$	q	$\neg s$
S	S	S	F	F	F	S	F	S	F	S	F	F
2.	1.	2.	6.	5.	6.	1.	5.	1.	4.	1.	3.	1.

1. **Antag** att slutledningen ej är korrekt, det vill säga att alla förutsättningar är sanna, men slutsatsen $\neg s$ är falsk.

2. t sann ger $\neg q$ sann, då $t \to \neg q$ sann.

3. $\neg q$ sann ger q falsk.

4. q falsk ger $\neg r$ falsk, då $\neg r \to q$ sann.

5. $\neg r$ falsk ger $s \vee p$ falsk, då $s \vee p \to \neg r$ sann.

6. $s \vee p$ är bara falsk om både s falsk och p falsk.

Detta ger dock en **motsägelse** då både s och $\neg s$ är falska. Då antagandet att slutledningen ej är korrekt (i 1.) leder till en motsägelse är alltså slutledningen korrekt. $\neg s$ är en korrekt slutsats ur förutsättningarna.

Svar: Slutledningen är korrekt. Vi har visat det med hjälp av reduktionsmetoden ovan.

7. Hur många olika fyrsiffriga tal kan man bilda med siffrorna i dagens datum, det vill säga med siffrorna 20160108 ?

Vi kan skriva siffrorna så som här intill. Vi ser att det finns fem olika siffror, dubbelt av siffran 1 och trippelt av siffran 0. Att det finns fler av vissa siffror gör att vi måste dela upp vår lösning i olika fall för att räkna varje tal en gång och inte dubbelräkna någon. Vi gör följande falluppdelning:

0
01
20168

1.) Tal med högst en av varje siffra.

Det finns 5 siffror att välja bland och vi har fyra platser att besätta. Det ger totalt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ olika tal där alla siffrorna är olika, enligt multiplikationsprincipen. (Multiplikationsprincipen förkortas nedan *mpp.*)

2.) Tal med två 1:or, en av de övriga siffrorna.

Placera först ut 1:orna. Vi väljer ut 2 bland 4 platser som 1:orna ska ha. Det kan göras på $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ sätt. De 2 andra platserna kan sedan fyllas med någon av de återstående 4 siffrorna, vilket ger $4 \cdot 3 = 12$ sätt. Totalt finns då $\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 12 = 72$ olika tal i detta fall, enligt mpp.

3.) Tal med två 0:or, en av de övriga siffrorna.

Precis som i fall 2, fast 0:orna tar platsen som 1:orna har där och vice versa. Ger totalt 72 olika tal även i detta fall.

4.) Två 1:or och två 0:or.

Placera ut 1:orna. Kan enligt ovan göras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. 0:orna får sedan de återstående platserna, så det blir totalt $6 \cdot 1 = 6$ olika tal i detta fall, enligt mpp.

5.) Tre 0:or, en av de övriga siffrorna.

Välj ut tre av de fyra platserna för 0:orna. Det kan göras på $\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ olika sätt. Den sista platsen kan sedan väljas bland de återstående fyra siffrorna, vilket ger 4 möjligheter. Total finns då $4 \cdot 4 = 16$ olika tal i detta fall, enligt mpp.

Vi summerar nu de antal tal vi fått i de olika fallen som tillsammans täcker alla tänkbara möjligheter. Vi får totalt: 120+72+72+6+16=286 olika tal, enligt additionsprincipen.

Svar: Man kan bilda 286 olika tal med siffrorna i dagens datum.