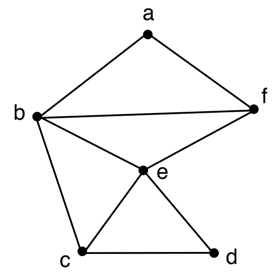
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

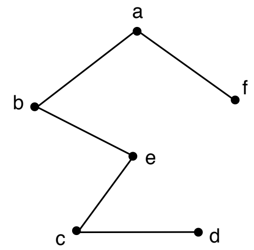
# Lösningar till tentamen
# 764G06 Diskret matematik och logik, 6 hp
# 2015-10-09

---

1. a) Det finns en hamiltoncykel i grafen, till exempel $a - b - c - d - e - f - a$.




b) Enligt sats 6.2 så finns det en sluten eulerväg precis då alla noder har jämnt gradtal och en öppen eulerväg bara om precis två noder ha udda gradtal. I denna graf har nod $a$ och $d$ grad 2, nod $b$ och $e$ grad 4 och nod $c$ och $f$ har grad 3. Då de två sista har udda grad finns det alltså en öppen eulerväg, men ej en sluten enligt satsen. Exempel på en öppen eulerväg är $f - a - b - f - e - b - c - d - e - c$.



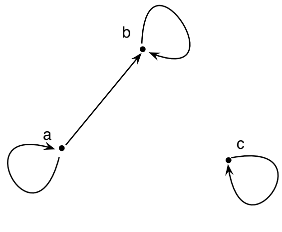

c) Ett spännade träd är en delgraf till den ursprungliga grafen som innehåller alla noder och är ett träd. Det finns många möjligheter. En möjlighet är det spännande träd som visas här intill. Antalet löv i detta träd är två st, nämligen $d$ och $f$. (Beroende på vilket spännande träd man väljer kan man få mellan 2 och 4 löv.)

**Svar:** a) Ja, det finns en hamiltoncykel, t ex $a - b - c - d - e - f - a$.
b) Finns ej sluten eulerväg, men en öppen enligt motivering ovan.
Ett exempel på en öppen eulerväg är: $f - a - b - f - e - b - c - d - e - c$.
c) Se spännande träd ovan. Detta träd har två löv, nämligen $d$ och $f$.

2. Låt $A = \{a, b, c\}$.

a) Ett exempel på en relation på $A$ som är reflexiv, men ej symmetrisk är:

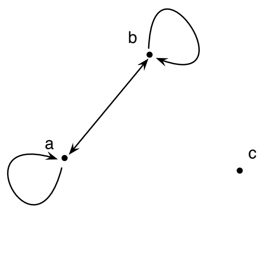
$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$.




Den är reflexiv då alla noder har loopar (alla relaterar till sig själva), men den är ej symmetrisk då $a\mathcal{R}b$ men $b\not\mathcal{R}a$ (alla pilar inte dubbelriktade).

b) Ett exempel på en relation på $A$ som är symmetrisk och transitiv, men ej reflexiv är:

$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$.




Den är symmetrisk då alla pilar är dubbelriktade och transitiv då alla indirekt relaterade par (via något tredje) också är direkt relaterade.

var god vänd

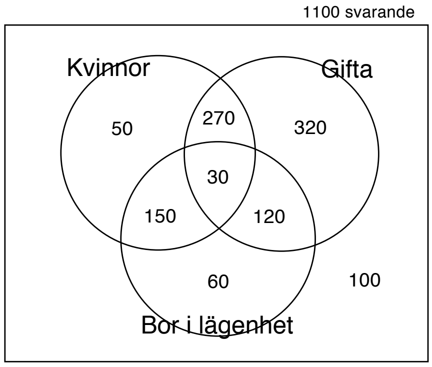
(De tvåstegsförbindelser som finns är de som inkludera $a$ och/eller $b$ och dubbelpilen mellan dessa och loopar på båda göra att alla möjliga bågar på och mellan dessa finns med.) Den är ej reflexiv då $c$ saknar loop.

c) En relation på $A$ är en viss uppsättning av de par vi kan bilda från $A$ till $A$. Vi skriver upp de 9 par som vi kan välja bland. För varje par har vi då valet att ta med eller inte i en viss relation, d v s 2 möjligheter. Totalt finns då enligt multiplikationsprincipen $2^9 = 512$ olika relationer.

$$(a,a),(a,b),(a,c)$$
$$(b,a),(b,b),(b,c)$$
$$(c,a),(c,b),(c,c)$$

**Svar:** a) Se ovan.
b) Se ovan.
c) Det finns $2^9 = 512$ olika relationer på $A$.

3. Vi använder ett venndiagram för att lösa problemet och för att hålla ordning på de överlapp som bildas mellan de tre kategorierna ”Kvinnor”, ”Gifta” och ”Bor i lägenhet”. Genom att börja längst in (gifta kvinnor som bor i lägenhet) kan vi sedan successivt räkna ut hur många det finns i varje område utifrån de antal som ges i uppgiften. När samtliga områden inom de tre cirklarna är uträknade kan dessa summeras: $500$ (kvinnor) $+ 320 + 120 + 60 = 1000$ personer. Alltså finns det 100 personer i området utanför cirklarna, då det var 1100 som svarade. Vi noterar att alla utanför cirkeln Kvinnor är män och kan nu besvara frågorna.




a) Antalet män som bodde i lägenhet är de 120+60=180 st som ligger utanför cirkeln Kvinnor, men inom cirkeln Bor i lägenhet.

b) De ogifta männen som inte bor i lägenhet är de som är utanför alla tre cirklarna, det vill säga 100 stycken.

**Svar:** a) 180 personer av de svarande var män som bodde i lägenhet.
b) 100 ogifta män bodde inte i lägenhet.

4. a) Vi visar att $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$ inte är logiskt ekvivalent med $(\neg r \to p) \to \neg q$ med hjälp av en sanningsvärdestabell:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ | $\neg r$ | VL: $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$ | $\neg r \to p$ | $\neg q$ | HL: $(\neg r \to p) \to \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Vi ser att uttrycken skiljer sig åt på rad 2 och rad 7 i tabellen. Då VL och HL ej har samma sanningsvärdestabell är de **ej** logiskt ekvivalenta.

b) *”Om det regnar så badar vi inte. Om det inte regnar så ler solen mot oss. Vi badar. Alltså ler solen mot oss.”*

Vi inför följande satser: $p$ : Det regnar, $q$ : Vi badar, $r$ : Solen ler mot oss.

Med dessa kan vi nu skriva slutledningen som ett satslogiskt uttryck:

$$(p \to \neg q) \wedge (\neg p \to r) \wedge q \;\Rightarrow\; r$$

Vi visar att det är en korrekt slutsats med hjälp av deduktion.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $q$ | Förutsättning |
| 2. | $\neg(\neg q)$ | 1 och dubbel negation. |
| 3. | $p \to \neg q$ | Förutsättning |
| 4. | $\neg p$ | 2, 3 och Modus tollens. |
| 5. | $\neg p \to r$ | Förutsättning |
| 6. | $r$ | 4, 5 och Modus ponens. |

Vi har härlett $r$ ur de givna förutsättningarna. Slutledningen är alltså korrekt.

**Svar:** a) Uttrycken är ej logiskt ekvivalenta. Se sanningsvärdestabell ovan.
b) Slutledningen är korrekt. Se uttryck och härledning ovan.

5. Ur en grupp på 8 personer ska man utse en styrelse bestående av 5 personer, varav en ska vara ordförande, en ska vara kassör och övriga tre ledamöter. Mattias som är en av de 8 har meddelat att om han ska sitta i styrelsen vill han inte vara ordförande eller kassör.

Då Mattias inte vill sitta på ordförande- respektive kassörsposten så kan dessa poster väljas på 7 respektive 6 olika sätt, och då den inbördes ordningen där spelar roll så finns totalt $7 \cdot 6 = 42$ olika sätt att tillsätta dessa, enligt multiplikationsprincipen. När dessa valts finns det 6 personer kvar att välja bland till de tre ledamotsposterna, då Mattias nu är valbar också. Dessa tre platser är likvärdiga, så vi ska inte ta hänsyn till den inbördes ordningen. Dessa kan då tillsättas på $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ olika sätt.

Totalt får vi $42 \cdot 20 = 840$ olika sätt att utse styrelsen ibland de 8 personerna om vi ska uppfylla Mattias önskemål om att inte vara ordförande eller kassör.

**Svar:** Det finns 840 olika sätt att utse styrelsen bland de 8 personerna så att Mattias önskemål uppfylls.

6. Låt $x$ vara antalet noder av grad 5. Vi har då de noder med gradtal som listas intill.
För träd gäller att $N = B + 1$, där $N$ är antalet noder och $B$ är antalet bågar. Vi har antalet noder $N = 23 + 5 + 5 + 2 + x \;\Leftrightarrow\; N = 35 + x$.

23 noder av grad 1
5 noder av grad 2
5 noder av grad 3
2 noder av grad 4
$x$ noder av grad 5

Enligt handskakningslemmat gäller att summan av gradtalen $= 2 \cdot B$, så ur gradtalen kan vi få fram $B$. Med informationen om antalet noder och gradtalen får vi:

$$B = \frac{\text{Summan av gradtalen}}{2} = \frac{23\cdot1 + 5\cdot2 + 5\cdot3 + 2\cdot4 + x\cdot5}{2} = \frac{56+5x}{2}.$$

var god vänd

Uttrycken för $N$ och $B$ insatt i ekvationen för träd ($N = B + 1$) ger då:

$N = B + 1 \Leftrightarrow 35 + x = \frac{56+5x}{2} + 1 \Leftrightarrow 34 + x = \frac{56+5x}{2} \Leftrightarrow 68 + 2x = 56 + 5x \Leftrightarrow$

$12 + 2x = 5x \Leftrightarrow 12 = 3x \Leftrightarrow 4 = x.$ Grafen har alltså fyra noder av grad 5.

**Svar:** Grafen har fyra noder av grad 5.

7. $C = \{6, 7, 8\}$ ger $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}, \{6, 7, 8\}\}$.

   ($\mathcal{P}(C)$ är mängden av alla delmängder till $C$.)

   Låt $A$ och $B$ vara mängder i $\mathcal{P}(C)$. Vi säger att $A\mathcal{R}B$ om $A \subseteq B$. Vi visar att denna relation på $\mathcal{P}(C)$ är en partialordning, det vill säga att den har egenskaperna reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

   -Reflexiv? Ja, eftersom $A \subseteq A$ för alla mängder, och därmed för samtliga mängder i $\mathcal{P}(C)$.

   -Antisymmetrisk? Ja, för om $A \neq B$ och $A \subseteq B$ så finns det något element i $B$ som inte finns i $A$ (annars hade de varit lika) och därmed gäller då att $B \not\subseteq A$ . Relationen är alltså alltid enkelriktad (om den ens finns) mellan två olika mängder i $\mathcal{P}(C)$, vilket är kravet för antisymmetri.

   -Transitiv? Ja, för om $A \subseteq B$ och $B \subseteq D$ så är ju $A \subseteq B \subseteq D$, det vill säga $A \subseteq D$ för godtyckliga mängder $A$, $B$, $D$ i $\mathcal{P}(C)$, vilket är precis det som krävs för att relationen ska vara transitiv.

   Då relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv så är den en partialordning på $\mathcal{P}(C)$.

   En totalordning är en partialordning där alla element är jämförbara, det vill säga att de är relaterade i någon riktning ($A\mathcal{R}B$, $B\mathcal{R}A$ eller båda). Relationen ovan är ej en totalordning på $\mathcal{P}(C)$ för om vi till exempel tar mängderna $\{6\}$ och $\{7\}$ så gäller ju varken $\{6\} \subseteq \{7\}$ eller $\{7\} \subseteq \{6\}$. Dess två mängder är inte relaterade till varandra och därmed är relation $\subseteq$ på $\mathcal{P}(C)$ ej en totaltordning.

   **Svar:** Relationen $\subseteq$ på $\mathcal{P}(C)$ är en partialordning då den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, men är ej en totalordning då det finns element i $\mathcal{P}(C)$ som inte är relaterade till varandra. Se motiveringar och motexempel ovan.