



Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

| | |
|--|--|
| Datum för tentamen | 2016-12-13 |
| Sal (1) Om tentan går i flera salar ska du bifoga ett försättsblad till varje sal och <u>ringa in</u> vilken sal som avses | TER 3, TER4, TERE |
| Tid | 8-12 |
| Kurskod | 732G71 |
| Provkod | TEN1 |
| Kursnamn/benämning Provnamn/benämning | Statistik B Tentamen |
| Institution | IDA |
| Antal uppgifter som ingår i tentamen | 4 |
| Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen | Bertil Wegmann |
| Telefon under skrivtiden | 070 – 1128321 |
| Besöker salen ca kl. | 10:00 |
| Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress) | anna.grabska.eklund@liu.se, tel 2362 |
| Tillåtna hjälpmedel | Ett A4-blad med egna handskrivna anteckningar (båda sidor) samt räknedosa. |
| Övrigt | |
| Vilken typ av papper ska användas, rutigt eller linjerat | |
| Antal exemplar i påsen | |

Tentamen

Linköpings universitet, Institutionen för datavetenskap, Statistik

| | |
|----------------------|---|
| Kurskod och namn: | 732G71 Statistik B |
| Datum och tid: | 2016-12-13, 8-12 |
| Jourhavande lärare: | Bertil Wegmann |
| Tillåtna hjälpmedel: | Ett A4-blad med egna handskrivna anteckningar (båda sidor) samt räknedosa. |
| Betygsgränser: | Tentamen omfattar totalt 20p. Godkänt från 12p, väl godkänt från 16p. Siffrorna i uppgifterna är delvis påhittade. |

Redovisa och motivera tydligt alla dina lösningar!

Uppgift 1 (8p)

I en pilotstudie av en bransch har man slumpmässigt valt ut 8 stycken företag från branschen och samlat in information angående det senaste årets omsättning (i miljontals kronor) och antalet år som respektive företag har varit etablerat i branschen. Detta gav följande tabell:

| Företag | Omsättning | Antal år |
|---------|------------|----------|
| 1 | 533 | 6 |
| 2 | 525 | 4 |
| 3 | 510 | 3 |
| 4 | 665 | 9 |
| 5 | 502 | 5 |
| 6 | 561 | 9 |
| 7 | 535 | 6 |
| 8 | 527 | 7 |

Antag en enkel linjär regressionsmodell där omsättningen ska förklaras av antalet år. $SSE = 8526$.

- Testa på signifikansnivåerna 1 och 5 % om antalet år bidrar signifikant som förklaringsvariabel i modellen. Dra fullständig slutsats av ditt test i ord utifrån de olika signifikansnivåerna i uppgiften. (4p)
- Beräkna och tolka modellens förklaringsgrad. (2p)
- En prognos för omsättningen för ett företag (ej med i det slumpmässiga urvalet) som har varit etablerat i 6 år i branschen blev 543 miljoner kronor. Beräkna ett 95 % prognosintervall för omsättningen för detta företag och tolka intervallet i ord. (2p)

Uppgift 2 (2p)

Försäljningsvärden (i miljoners kronor) för ett sportföretag presenteras nedan i löpande och fasta priser mellan åren 2008 till 2013 samt KPI för denna tidsperiod:

| År | Löpande priser | Fasta priser (2011 års priser) | KPI |
|------|----------------|--------------------------------|-----|
| 2008 | 174 | 175 | 301 |
| 2009 | 191 | 196 | 300 |
| 2010 | 204 | 207 | 303 |
| 2011 | 201 | 201 | 311 |
| 2012 | 220 | 217 | 314 |
| 2013 | 220 | 217 | 314 |

Beräkna det prisindex för sportprodukter som använts mellan 2008 till 2013 för att beräkna de fasta priserna. Använd sedan detta prisindex för att beräkna ett relativprisindex som beskriver sportprodukters prisutveckling jämfört med KPI. Uttryck dina beräknade index i 2011 års priser.

Uppgift 3 (6p)

I en större studie av omsättningsfaktorer det senaste året för branschen i uppgift 1 samlade man även in följande information från ett slumpmässigt urval av 54 stycken företag:

y = omsättning i miljoners kronor

x_1 = antal etablerade år i branschen (Antal år)

x_2 = 1 om företaget grundades i Norden, 0 annars (Norden)

x_3 = annonseringskostnader i tusentals kronor (Annonseringskostnader)

Skattning av linjära regressionsmodeller med y som beroende variabel och med alla möjliga kombinationer av förklaringsvariablerna x_1, x_2, x_3 gav följande resultat för 7 skattade linjära regressionsmodeller:

MODELL 1:

Regression Analysis: Omsättning versus Antal år

Analysis of Variance

| Source | DF | Adj SS | Adj MS | F-Value | P-Value |
|------------|----|--------|---------|---------|---------|
| Regression | 1 | 61276 | 61276,3 | 61,70 | 0,000 |
| Error | 52 | 51645 | 993,2 | | |
| Total | 53 | 112921 | | | |

Model Summary

| S | R-sq | R-sq(adj) | R-sq(pred) |
|---------|--------|-----------|------------|
| 31,5147 | 54,26% | 53,39% | 48,98% |

Coefficients

| Term | Coef | SE Coef | T-Value | P-Value | VIF |
|----------|-------|---------|---------|---------|------|
| Constant | 435,8 | 14,4 | 30,33 | 0,000 | |
| Antal år | 17,62 | 2,24 | 7,85 | 0,000 | 1,00 |

MODELL 2:

Regression Analysis: Omsättning versus Norden

Analysis of Variance

| Source | DF | Adj SS | Adj MS | F-Value | P-Value |
|------------|----|--------|--------|---------|---------|
| Regression | 1 | 10192 | 10192 | 5,16 | 0,027 |
| Error | 52 | 102729 | 1976 | | |
| Total | 53 | 112921 | | | |

Model Summary

| S | R-sq | R-sq(adj) | R-sq(pred) |
|---------|-------|-----------|------------|
| 44,4472 | 9,03% | 7,28% | 1,26% |

Coefficients

| Term | Coef | SE Coef | Coef | T-Value | P-Value | VIF |
|----------|--------|---------|------|---------|---------|------|
| Constant | 532,48 | | 7,74 | 68,82 | 0,000 | |
| Norden | 28,2 | | 12,4 | 2,27 | 0,027 | 1,00 |

MODELL 3:

Regression Analysis: Omsättning versus Annonseringskostnader

Analysis of Variance

| Source | DF | Adj SS | Adj MS | F-Value | P-Value |
|------------|----|--------|---------|---------|---------|
| Regression | 1 | 51080 | 51079,7 | 42,95 | 0,000 |
| Error | 52 | 61842 | 1189,3 | | |
| Total | 53 | 112921 | | | |

Model Summary

| S | R-sq | R-sq(adj) | R-sq(pred) |
|---------|--------|-----------|------------|
| 34,4857 | 45,23% | 44,18% | 40,42% |

Coefficients

| Term | Coef | SE Coef | Coef | T-Value | P-Value | VIF |
|-----------------------|-------|---------|-------|---------|---------|------|
| Constant | 115,8 | | 65,4 | 1,77 | 0,083 | |
| Annonseringskostnader | 2,255 | | 0,344 | 6,55 | 0,000 | 1,00 |

MODELL 4:

Regression Analysis: Omsättning versus Antal år; Norden

Analysis of Variance

| Source | DF | Adj SS | Adj MS | F-Value | P-Value |
|------------|----|--------|---------|---------|---------|
| Regression | 2 | 66006 | 33002,8 | 35,88 | 0,000 |
| Error | 51 | 46916 | 919,9 | | |
| Total | 53 | 112921 | | | |

Model Summary

| S | R-sq | R-sq(adj) | R-sq(pred) |
|---------|--------|-----------|------------|
| 30,3301 | 58,45% | 56,82% | 51,47% |

Coefficients

| Term | Coef | SE Coef | Coef | T-Value | P-Value | VIF |
|----------|-------|---------|------|---------|---------|------|
| Constant | 432,2 | | 13,9 | 31,07 | 0,000 | |
| Antal år | 16,97 | | 2,18 | 7,79 | 0,000 | 1,02 |
| Norden | 19,37 | | 8,54 | 2,27 | 0,028 | 1,02 |

MODELL 5:

Regression Analysis: Omsättning versus Antal år; Annonseringskostnader

Analysis of Variance

| Source | DF | Adj SS | Adj MS | F-Value | P-Value |
|------------|----|--------|---------|---------|---------|
| Regression | 2 | 67333 | 33666,7 | 37,66 | 0,000 |
| Error | 51 | 45588 | 893,9 | | |
| Total | 53 | 112921 | | | |

Model Summary

| S | R-sq | R-sq(adj) | R-sq(pred) |
|---------|--------|-----------|------------|
| 29,8978 | 59,63% | 58,05% | 53,76% |

Coefficients

| Term | Coef | SE Coef | T-Value | P-Value | VIF |
|-----------------------|-------|---------|---------|---------|------|
| Constant | 265,7 | 66,7 | 3,98 | 0,000 | |
| Antal år | 12,43 | 2,92 | 4,26 | 0,000 | 1,88 |
| Annonseringskostnader | 1,064 | 0,409 | 2,60 | 0,012 | 1,88 |

MODELL 6:

Regression Analysis: Omsättning versus Norden; Annonseringskostnader

Analysis of Variance

| Source | DF | Adj SS | Adj MS | F-Value | P-Value |
|------------|----|--------|---------|---------|---------|
| Regression | 2 | 52757 | 26378,3 | 22,36 | 0,000 |
| Error | 51 | 60165 | 1179,7 | | |
| Total | 53 | 112921 | | | |

Model Summary

| S | R-sq | R-sq(adj) | R-sq(pred) |
|---------|--------|-----------|------------|
| 34,3468 | 46,72% | 44,63% | 39,66% |

Coefficients

| Term | Coef | SE Coef | T-Value | P-Value | VIF |
|-----------------------|-------|---------|---------|---------|------|
| Constant | 133,1 | 66,8 | 1,99 | 0,052 | |
| Norden | 11,88 | 9,96 | 1,19 | 0,239 | 1,08 |
| Annonseringskostnader | 2,140 | 0,356 | 6,01 | 0,000 | 1,08 |

MODELL 7:

Regression Analysis: Omsättning vs. Antal år; Norden; Annonseringskostnader

Analysis of Variance

| Source | DF | Adj SS | Adj MS | F-Value | P-Value |
|------------|----|--------|---------|---------|---------|
| Regression | 3 | 69919 | 23306,2 | 27,10 | 0,000 |
| Error | 50 | 43003 | 860,1 | | |
| Total | 53 | 112921 | | | |

Model Summary

| S | R-sq | R-sq(adj) | R-sq(pred) |
|---------|--------|-----------|------------|
| 29,3267 | 61,92% | 59,63% | 54,29% |

Coefficients

| Term | Coef | SE Coef | T-Value | P-Value | VIF |
|-----------------------|-------|---------|---------|---------|------|
| Constant | 291,8 | 67,2 | 4,34 | 0,000 | |
| Antal år | 12,81 | 2,87 | 4,47 | 0,000 | 1,89 |
| Norden | 14,79 | 8,53 | 1,73 | 0,089 | 1,09 |
| Annonseringskostnader | 0,884 | 0,414 | 2,13 | 0,038 | 2,00 |

- a) Testa med ett test på 5 % signifikansnivå om minst en av förklaringsvariablerna x_2, x_3 bidrar signifikant till att förklara företagets omsättning i modellen, givet att förklaringsvariabeln x_1 redan finns med i modellen. Dra fullständig slutsats av ditt test i ord. (2p) (om antalet frihetsgrader för kritiska värdet för testet inte finns i tabell, använd närliggande värde)
- b) Använd utskrifterna ovan för att på 1 och 5 % signifikansnivå välja bästa regressionsmodell för att förklara variationen i företagets omsättning med hjälp av procedurerna (var för sig)
- Bakåteliminering
 - Stegvis regression, där $\alpha_{\text{entry}} = \alpha_{\text{stay}}$

Motivera val av bästa modell väl för respektive procedur. (3p)

- c) Använd utskrifterna ovan för att välja bästa regressionsmodell för att förklara variationen i företagets omsättning med hjälp av den justerade förklaringsgraden. Motivera val av bästa modell. (1p)

Uppgift 4 (4p)

Uppgifter om antalet sysselsatta i Australien samlas in kvartalsvis av Australiens arbetsmyndighet för varje år. Nedan presenteras resultaten av tidsseriereggression, klassiska komponentuppdelningar och Holt-Winters metod från Minitab fr.o.m. kvartal 1 år 2011 t.o.m. kvartal 3 år 2016 (i miljontals), där $t = 1, 2, \dots, 23$ är en tidsvariabel för datamaterialet i tidsordning och Q1, Q2 och Q3 är dummyvariabler för kvartal 1, 2 och 3 i tidsseriereggressionen.

Regression Analysis: Antal sysselsatta i Australien versus t; Q1; Q2; Q3

Analysis of Variance

| Source | DF | Adj SS | Adj MS | F-Value | P-Value |
|------------|----|---------|---------|---------|---------|
| Regression | 4 | 1,24126 | 0,31031 | 101,87 | 0,000 |
| Error | 18 | 0,05483 | 0,00305 | | |
| Total | 22 | 1,29609 | | | |

Model Summary

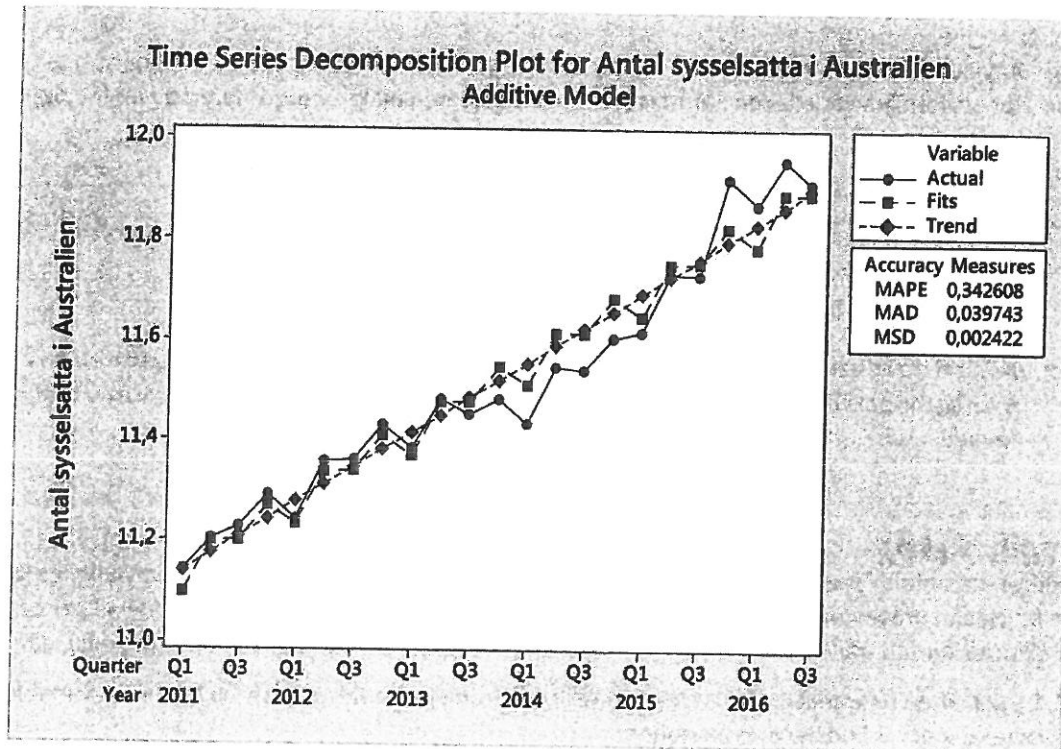
| S | R-sq | R-sq(adj) | R-sq(pred) |
|-----------|--------|-----------|------------|
| 0,0551923 | 95,77% | 94,83% | 92,95% |

Coefficients

| Term | Coef | SE Coef | T-Value | P-Value | VIF |
|----------|---------|---------|---------|---------|------|
| Constant | 11,1305 | 0,0324 | 343,84 | 0,000 | |
| t | 0,03466 | 0,00175 | 19,86 | 0,000 | 1,01 |
| Q1 | -0,0631 | 0,0335 | -1,88 | 0,076 | 1,63 |
| Q2 | 0,0006 | 0,0334 | 0,02 | 0,985 | 1,63 |
| Q3 | -0,0436 | 0,0335 | -1,30 | 0,209 | 1,63 |

Regression Equation

Ant. sysselsatta i Austr. = 11,1305 + 0,03466 t - 0,0631 Q1 + 0,0006 Q2 - 0,0436 Q3



Time Series Decomposition for Antal sysselsatta i Australien

Additive Model

Data Antal sysselsatta i Australien
 Length 23
 NMissing 0

Fitted Trend Equation

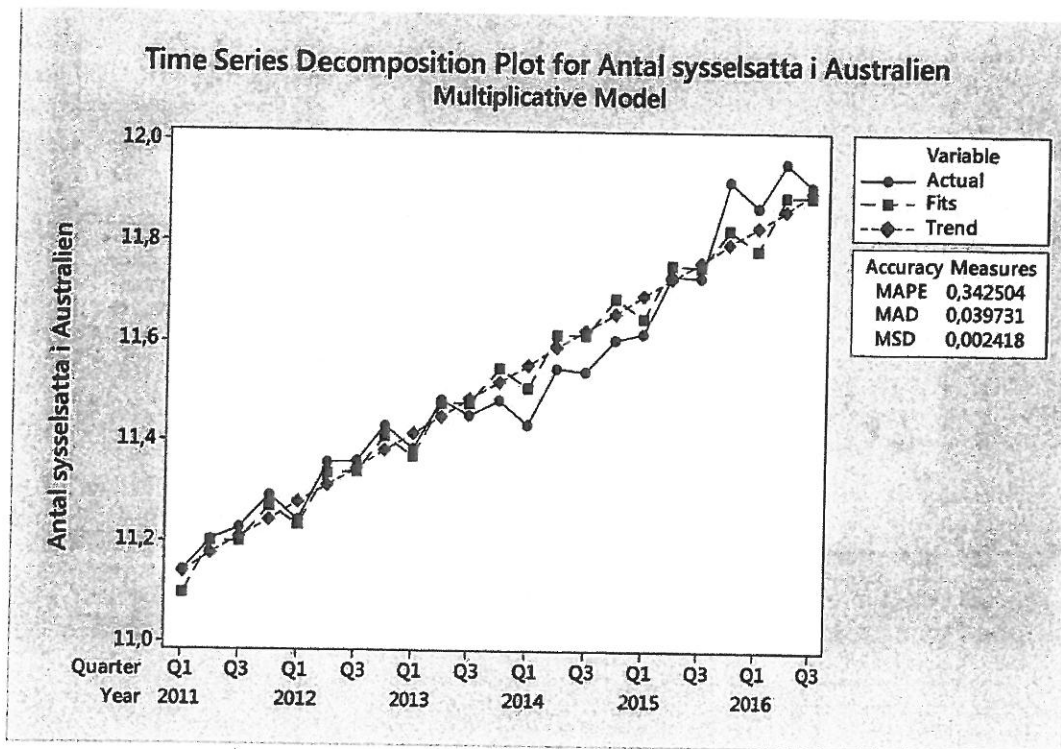
$$Y_t = 11,1052 + 0,03456xt$$

Seasonal Indices

| Period | Index |
|--------|------------|
| 1 | -0,0447516 |
| 2 | 0,0256714 |
| 3 | -0,0082516 |
| 4 | 0,0273318 |

Accuracy Measures

MAPE 0,342608
 MAD 0,039743
 MSD 0,002422



Time Series Decomposition for Antal sysselsatta i Australien

Multiplicative Model

Data Antal sysselsatta i Australien
 Length 23
 NMissing 0

Fitted Trend Equation

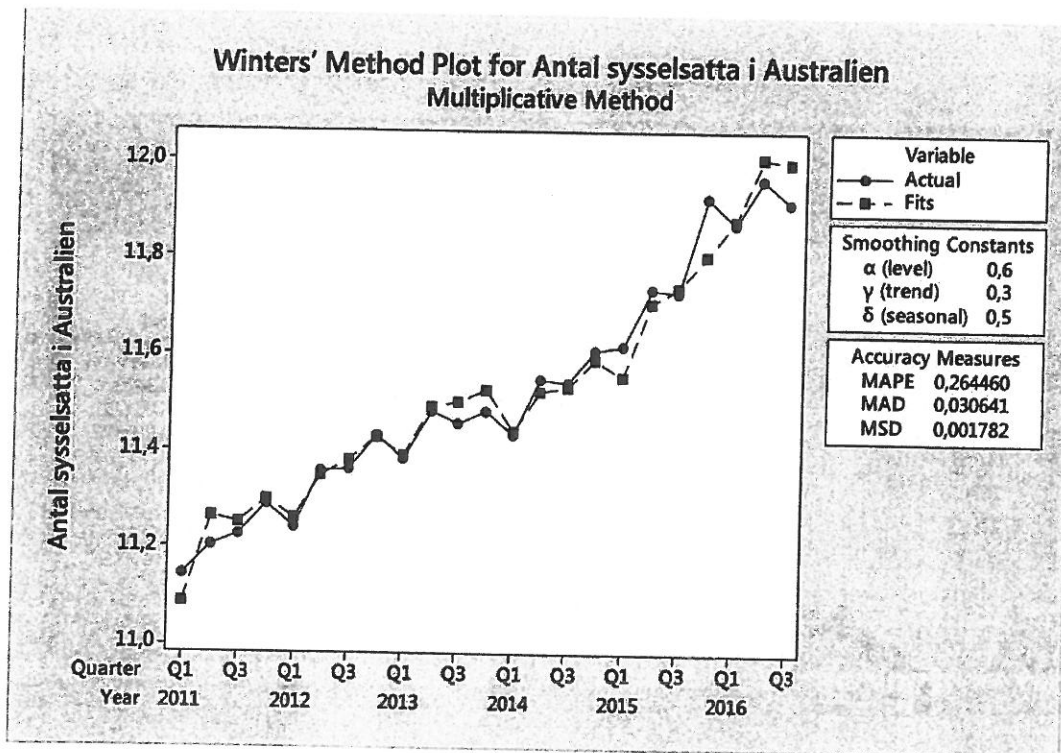
$$Y_t = 11,1051 + 0,03456 \times t$$

Seasonal Indices

| Period | Index |
|--------|---------|
| 1 | 0,99608 |
| 2 | 1,00224 |
| 3 | 0,99927 |
| 4 | 1,00242 |

Accuracy Measures

| | |
|------|----------|
| MAPE | 0,342504 |
| MAD | 0,039731 |
| MSD | 0,002418 |



- a) Rangordna modellerna gentemot varandra utifrån hur bra respektive modell skattar datamaterialet. Vilken av modellerna verkar bäst? Motivera. (1p)
- b) Tolka de skattade lutningarna för dummyvariablerna för kvartalen Q1, Q2 och Q3 i tidsserieregessionen. (1p)
- c) Beräkna en prognos för kvartal 1 år 2017 med hjälp av den skattade tidsserieregessionen. Tolka prognosen i ord. (1p)
- d) Beräkna en prognos för kvartal 4 år 2016 med hjälp av den multiplikativa komponentuppdelningsmetoden. Tolka prognosen i ord. (1p)

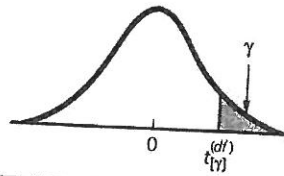


TABLE A2 A t-Table: Values of $t_{(df)}^{(gamma)}$

| df | $t_{[.10]}^{(df)}$ | $t_{[.05]}^{(df)}$ | $t_{[.025]}^{(df)}$ | $t_{[.01]}^{(df)}$ | $t_{[.005]}^{(df)}$ |
|------|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|---------------------|
| 1 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 1.363 | 1.812 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 1.356 | 1.796 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 1.350 | 1.782 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 1.345 | 1.771 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 1.341 | 1.761 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 1.337 | 1.753 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 1.333 | 1.746 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 1.330 | 1.740 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 1.328 | 1.734 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 1.325 | 1.729 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 1.323 | 1.725 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 1.321 | 1.721 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 1.319 | 1.717 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 1.318 | 1.714 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 1.316 | 1.711 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 1.315 | 1.708 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 1.314 | 1.706 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 1.313 | 1.703 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 1.311 | 1.701 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| inf. | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

Source: From "Table of Percentage Points of the t-Distribution," by Maxine Merrington, *Biometrika* 32 (1941), 300. Reproduced by permission of the *Biometrika* Trustees.

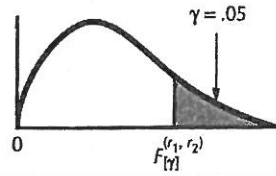


TABLE A3 An F-Table: Values of $F_{[.05]}$

| Denominator Degrees of Freedom, r_2 | Numerator Degrees of Freedom, r_1 | | | | | | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 161.4 | 199.5 | 215.7 | 224.6 | 230.2 | 234.0 | 236.8 | 238.9 | 240.5 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 |
| 120 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.17 | 2.09 | 2.02 | 1.96 |
| ∞ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 |

Source: From "Tables of Percentage Points of the Inverted Beta (F)-Distribution," by Maxine Merrington and Catherine M. Thompson, *Biometrika* 33 (1943), 73-88. Reproduced by permission of the *Biometrika* Trustees.