4

Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings universitet

Datum för tentamen	2015-03-21
Sal (2)	U11 U15
Tid	8-12
Kurskod	732G20
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning **Provnamn/benämning**	Statistisk teori I Tentamen
Institution	IDA
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Bertil Wegmann, bertil.wegmann@liu.se
Telefon under skrivtiden	070-112 83 21
Besöker salen ca klockan	9³⁰
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	Annelie Almquist, 013 - 282934, annelie.almquist@liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Räknedosa. Kursboken av DeGroot/Schervish,
Övrigt	som ska vara fri från anteckningar, men får innehålla
Antal exemplar i påsen	13 understrykningar/överstrykningar samt

flikar för kapitel/avsnitt.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik
Bertil Wegmann

2015-03-21
Statistisk teori, 7.5 hp
732G20

Tentamen i Statistisk teori I, 7.5 hp

Skrivtid:	8-12
Hjälpmedel:	Räknedosa. Kursboken av DeGroot/Schervish, som ska vara fri från anteckningar, men får innehålla understrykningar/överstrykningar samt flikar för kapitel/avsnitt.
Jourhavande lärare:	Bertil Wegmann, tel. 070 − 1128321
Betygsgränser:	Tentamen omfattar totalt 25 poäng. 15 poäng ger godkänt, 20 poäng ger väl godkänd.

Redovisa och motivera alla dina lösningar.

1. Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen (p.d.f.)

$$f(x) = \begin{cases} \alpha 10^{\alpha} x^{-\alpha-1} & \text{om } x > 10 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

där $\alpha > 0$ är en konstant.

   (a) Visa att $f(x)$ är en giltig täthetsfunktion för X. 1p.

   (b) Beräkna fördelningsfunktionen (c.d.f.) för X. 1p.

   (c) Beräkna den övre (tredje) kvartilen för X då $\alpha = 1$. 1p.

   (d) Beräkna variansen för X då $\alpha = 3$. 2p.

2.

   (a) Antag att X följer en χ^2−fördelning med 2 frihetsgrader. Vilken fördelning (inklusive definitionsmängd) har $\frac{3}{2}X$? 2p.

   (b) Antag att W följer en fördelning där värdena 1, 2, och 3 antas med sannolikheterna 0.1, 0.3, och 0.6, respektive. Bestäm den moment-genererande funktionen (m.g.f.) för W. 2p.

   (c) Låt X och Y vara två stokastiska variabler med simultan täthetsfunktion

$$f(x, y) = 4xy \text{ för } 0 \leq x \leq 1 \text{ och } 0 \leq y \leq 1$$

   och $f(x, y) = 0$ annars. Beräkna den betingade fördelningen $f(y|x)$. 1p.

3. Antag att du har n stycken oberoende observationer från sannolikhetsfunktionen

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta (1-\theta)^x & \text{för } x = 0, 1, 2, \ldots \text{ och } 0 < \theta < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

   (a) Härled maximum likelihood-skattningen $\hat{\theta}$ av θ. 2p.

   (b) Man kan visa att $E[X] = \frac{1-\theta}{\theta}$. Beräkna Fisherinformationen i ett oberoende slumpmässigt urval om n stycken observationer från $f(x|\theta)$. 2p.

   (c) Härled momentskattningen $\hat{\theta}_{mom}$ av θ. 1p.

4. Antag ett oberoende stickprov från populationen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, där μ är okänt. Det oberoende stickprovet gav följande observationer: 5.7, 4.8, 6.2, 5.8, 6.7, 6.2, 5.1, 6.0, 5.4.

   (a) Antag att standardavvikelsen σ är känd. Längden på ett dubbelsidigt 99%-igt konfidensintervall för μ blev 1. Bestäm värdet på σ. 2.5p.

   (b) Antag nu att standardavvikelsen σ är okänd. Beräkna ett dubbelsidigt 95%-igt konfidensintervall för σ^2. Tolka intervallet i ord. 2.5p.

5.

   (a) Antag ett oberoende stickprov $X_1, \ldots, X_n | \mu \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2 = 16)$ och antag apriorifördelningen $\mu \sim N(0, \nu_0^2 = 9)$. Aposteriorifördelningen för $\mu | x_1, \ldots, x_n$ gav variansen 1.16. Vad var stickprovsstorleken n i detta stickprov? 2p.

   (b) Antag ett oberoende stickprov $X_1, \ldots, X_n$ från en fördelning med täthetsfunktion

   $$f(x_i|\theta) = \theta x_i^2 e^{-\theta x_i^3}, \; x_i > 0, \theta > 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

   Antag även att apriorifördelningen för θ är gammafördelad med parametrarna $\alpha = \beta = 2$. Härled aposteriorifördelningen för θ för ett godtyckligt stickprov $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 2p.

   (c) Beräkna aposteriorifördelningen för θ i uppgift 5(b) baserat på följande stickprov: 1, 3, 2, 2, 3, 2. 1p.