LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik
Bertil Wegmann

2015-01-10
Statistisk teori, 7.5 hp
732G20

Tentamen i Statistisk teori I, 7.5 hp

Skrivtid:	8-12
Hjälpmedel:	Räknedosa. Kursboken av DeGroot/Schervish, som ska vara fri från anteckningar, men får innehålla understrykningar/överstrykningar samt flikar för kapitel/avsnitt.
Jourhavande lärare:	Bertil Wegmann, tel. 070 − 1128321
Betygsgränser:	Tentamen omfattar totalt 25 poäng. 15 poäng ger godkänt, 20 poäng ger väl godkänd.

Redovisa och motivera alla dina lösningar.

1. Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen (p.d.f.)

$$f(x) = \begin{cases} c\,(1-x)^{c-1} & \text{om } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

där $c > 0$ är en konstant.

(a) Visa att $f(x)$ är en giltig täthetsfunktion för X. 1p.

(b) Beräkna fördelningsfunktionen (c.d.f.) för X. 1p.

(c) Beräkna $E\left[\frac{1}{(1-X)^2}\right]$ då $c = 5$. 1.5p.

(d) Beräkna variansen för $(1-X)^2$ då $c = 5$. 1.5p.

2.

(a) Antag att X följer en betafördelning med parametrarna $\alpha = \beta = 2$. Vilken täthetsfunktion (inklusive definitionsmängd) har $Y = X^2$? 2p.

(b) Antag två stycken oberoende variabler T och W, där T är exponentialfördelad med $E[T] = 2$ och W är χ^2-fördelad med 2 frihetsgrader. Vilken fördelning har $Z = T + W$? 2p.

(c) Beräkna variansen för $2T - W$. 1p.

3. Antag att du har n stycken oberoende observationer från sannolikhetsfunktionen

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{x^{x-1}\theta^{x-1}e^{-x\theta}}{x!} & \text{för } x = 1, 2, 3, \ldots \text{ och } 0 < \theta < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

(a) Härled maximum likelihood-skattningen $\hat{\theta}$ av θ. 2p.

(b) Tag fram maximum likelihood-skattningen $\widehat{\left(\frac{1}{1-\theta}\right)}$ av $\left(\frac{1}{1-\theta}\right)$. 1p.

(c) $E[X] = \frac{1}{1-\theta}$. Härled momentskattningen $\hat{\theta}_{mom}$ av θ. 1p.

(d) Variansen för X är $\frac{\theta}{(1-\theta)^3}$. Visa att $E\left[X^2\right] = \frac{1}{(1-\theta)^3}$. 1p.

4. Antag två oberoende stickprov från populationerna $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ och $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, där μ_X, μ_Y, σ_X^2, och σ_Y^2 är okända.

   (a) Antalet observationer i det första stickprovet var $n_X = 9$ och gav $\sum_{i=1}^{9} (x_i - \bar{x})^2 = 25.8064$. Bestäm den konfidensgrad som användes för det första stickprovet då längden på ett dubbelsidigt konfidensintervall för μ_X blev 4. 2.5p.

   (b) Det andra stickprovet med $n_Y = 9$ stycken observationer gav $\sum_{i=1}^{9} (y_i - \bar{y})^2 = 6.2485$. Utför följande hypotestest på 5% signifikansnivå: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ mot $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$. Drag fullständig slutsats av ditt test i ord. 2.5p.

5.

   (a) Antag ett oberoende stickprov från sannolikhetsfunktionen i uppgift 3. Antag även att apriorifördelningen för θ är χ^2-fördelad med $E[\theta] = 5$. Härled aposteriorifördelningen för θ för ett godtyckligt stickprov $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 2p.

   (b) Beräkna aposteriorifördelningen för θ i uppgift 5(a) baserat på följande stickprov: 5, 7, 6, 6, 7, 8. 1p.

   (c) Antag ett oberoende stickprov $X_1, \ldots, X_n | \mu \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2 = 9)$ och apriorifördelningen $\mu \sim N(0, 3)$. Aposteriorisannolikheten $P[\mu | x_1, \ldots, x_6 > 1]$ blev lika med 0.5 i ett stickprov om $n = 6$ observationer. Vad var stickprovsmedelvärdet $\bar{x}$ i detta stickprov? 2p.