LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik
Bertil Wegmann

2014-03-22
Statistisk teori, 7.5 hp
732G20

Tentamen i Statistisk teori I, 7.5 hp

Skrivtid:	8-12
Hjälpmedel:	Räknedosa. Kursboken av DeGroot/Schervish, som ska vara fri från anteckningar, men får innehålla understrykningar/överstrykningar samt flikar för kapitel/avsnitt.
Jourhavande lärare:	Bertil Wegmann, tel. $070 - 1128321$
Betygsgränser:	Tentamen omfattar totalt 25 poäng. 15 poäng ger godkänt, 20 poäng ger väl godkänd.

Redovisa och motivera alla dina lösningar.

1. Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen (p.d.f.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3c^3}{x^4} & \text{om } x > c \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där $c > 0$ är en konstant.

   (a) Visa att $f(x)$ är en giltig täthetsfunktion för X. 1p.
   (b) Beräkna fördelningsfunktionen (c.d.f.) för X. 1p.
   (c) Beräkna $E[2X - 3c]$. 1p.
   (d) Beräkna variansen för X då $c = 1$. 2p.

2. Antag att du har n stycken oberoende observationer från täthetsfunktionen

$$f(x|\beta) = \begin{cases} \frac{\beta^3}{2} x^2 e^{-\beta x} & \text{för } x > 0,\ \beta > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

   (a) Härled maximum likelihood-skattningen $\hat{\beta}$ av β. 2p.
   (b) Tag fram maximum likelihood-skattningen $\widehat{\left(\frac{3}{\beta}\right)}$ av $\left(\frac{3}{\beta}\right)$. 1p.
   (c) Beräkna Fisherinformationen för en observation från $f(x|\beta)$. 2p.

3.

   (a) Antag att X är rektangulärt fördelad på intervallet $(0, 1)$. Visa att $Y = X^{1/4}$ är betafördelad och bestäm värdena på parametrarna för denna betafördelning. 2p.
   (b) Antag att V är samma stokastiska variabel som X i uppgift 1. Visa att $Y = \log\left(\frac{X}{c}\right)$ är en exponentialfördelad variabel och bestäm värdet på parametern i denna exponentialfördelning. 2p.
   (c) Antag att $Z = \frac{\sum_{i=1}^{3} Y_i}{3}$, där Y_1, Y_2, Y_3 är oberoende exponentialfördelade variabler med medelvärden 1, 2 och 3, respektive. Beräkna variansen för Z. 1p.

4. Antag två oberoende stickprov från populationerna $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ och $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, där μ_X, μ_Y, σ_X^2, och σ_Y^2 är okända.

   (a) Antalet observationer i det första stickprovet är $n_X = 7$. Bestäm stickprovsstandardavvikelsen s_x för det första stickprovet där ett enkelsidigt 95%-igt konfidensintervall för σ_X^2 blev (0, 38.532). 2.5p.

   (b) Det andra stickprovet med $n_Y = 8$ stycken observationer gav $\bar{y} = 12$ och $\sum_{i=1}^{8} (y_i - 12)^2 = 28$. Beräkna ett enkelsidigt 90%-igt konfidensintervall med en övre konfidensgräns för μ_Y. Tolka intervallet i ord. 2.5p.

5.

   (a) Antag ett oberoende stickprov $X_1, \ldots, X_n | p$ från en geometrisk fördelning med sannolikhetsfunktion $f(x_i|p) = p\,(1-p)^{x_i}$, $x_i = 0, 1, \ldots$ för $i = 1, 2, \ldots, n$. Antag även att apriorifördelningen för sannolikheten för lyckat försök, p, följer en betafördelning med parametrarna $\alpha = \beta = 5$. Härled aposteriorifördelningen för p för ett godtyckligt stickprov $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 2p.

   (b) Beräkna aposteriorifördelningen för p i uppgift 5(a) baserat på följande stickprov: 0, 2, 1, 1, 0, 2. 1p.

   (c) Antag ett oberoende stickprov $X_1, \ldots, X_n | \theta \overset{iid}{\sim} Poisson(\theta)$. Antag även att apriorifördelningen för θ följer en χ^2-fördelning med 8 frihetsgrader. Härled aposteriorifördelningen för θ för ett godtyckligt stickprov $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 2p.