LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik
Bertil Wegmann

2014-01-11
Statistisk teori, 7.5 hp
732G20

# Tentamen i Statistisk teori I, 7.5 hp

| | |
|---|---|
| Skrivtid: | 8-12 |
| Hjälpmedel: | Räknedosa.<br>Kursboken av DeGroot/Schervish, som ska vara fri från anteckningar, men får innehålla understrykningar/överstrykningar samt flikar för kapitel/avsnitt. |
| Jourhavande lärare: | Bertil Wegmann, tel. 070 − 1128321 |
| Betygsgränser: | Tentamen omfattar totalt 25 poäng. 15 poäng ger godkänt, 20 poäng ger väl godkänd. |

**Redovisa och motivera alla dina lösningar.**

1. Den stokastiska variabeln $X$ har täthetsfunktionen (p.d.f.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3-x) & \text{om } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

   (a) Vilket typvärde (mode) har $X$ ? 1p.

   (b) Beräkna fördelningsfunktionen (c.d.f.) för $X$. 1p.

   (c) Beräkna den lägre (första) kvartilen för $X$. 1p.

   (d) Beräkna variansen för $X$. 2p.

2. Antag att du har $n$ stycken oberoende observationer från täthetsfunktionen

$$f(x|\beta,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\theta}{\beta}} & \text{för } x \geq \theta,\ \beta > 0,\ -\infty < \theta < \infty \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

   (a) Härled maximum likelihood-skattningen $\hat{\beta}$ av $\beta$, givet att $\theta = 2$. 2p.

   (b) Vi har att $E[X] = \beta + \theta$. Beräkna Fisherinformationen för en observation från $f(x|\beta,\theta)$, givet att $\theta = 1$. 2p.

   (c) Beräkna momentskattningen $\hat{\beta}_{mom}$ av $\beta$, givet att $\theta = 2$ och $\bar{x} = 4$ från ett oberoende stickprov. 1p.

3.

   (a) Låt $X$ vara en stokastisk variabel med täthetsfunktion $f(x) = \frac{1}{8}(3x+1)$ , $0 < x < 2$. Vilken täthetsfunktion (inklusive definitionsmängd) har $Y = 3X^2$ ? 2p.

   (b) Antag att $X$ är en exponentialfördelad variabel med medelvärde 4. Visa att $Y = \theta\left(1 - e^{-x/4}\right)$ är rektangulärt fördelad på intervallet $(0, \theta)$. 2p.

   (c) Låt $X$ och $Y$ vara två stokastiska variabler med simultan täthetsfunktion

$$f(x,y) = 2(x+y) \text{ för } 0 < y < x < 1$$

   och $f(x,y) = 0$ annars. Beräkna den betingade fördelningen $f(y|x)$. 1p.

4. Antag två oberoende stickprov från populationen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, där $\mu$ och $\sigma^2$ är okända.

   (a) Antalet observationer $n$ i det första stickprovet är stort och detta stickprov gav stickprovsstandardavvikelsen $s = 32$. Bestäm $n$ i det första stickprovet där längden på ett dubbelsidigt 95%-igt konfidensintervall för $\mu$ var 7.84. 2.5p.

   (b) Det andra stickprovet med $n = 11$ stycken observationer gav $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 23.2$. Beräkna ett dubbelsidigt 90%-igt konfidensintervall för $\sigma^2$. Tolka intervallet i ord. 2.5p.

5.

   (a) Antag ett oberoende stickprov $X_1, \ldots, X_n | \mu \overset{iid}{\sim} N(\mu, 4)$ och apriorifördelningen $\mu \sim N(1, 1)$. Vad är aposteriorisannolikheten att $\mu > 1$ för ett stickprov $x_1, \ldots, x_8$ där $\bar{x} = 0.8$? 2p.

   (b) Antag ett oberoende stickprov från Gammafördelningen med parametrarna $\alpha = 3$ och $\beta$. Antag även att apriorifördelningen för $\beta$ följer en Gammafördelning med parametrarna $\alpha' = \beta' = 4$. Härled aposteriorifördelningen för $\beta$ för ett godtyckligt stickprov $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 2p.

   (c) Beräkna aposteriorifördelningen för $\beta$ i uppgift 5(b) baserat på följande stickprov: 3, 1, 2, 3, 1. 1p.