Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

Datum för tentamen	2013-10-24
Sal (1) Om tentan går i flera salar ska du bifoga ett försättsblad till varje sal och <u>ringa in</u> vilken sal som avses	TER3
Tid	8-12
Kurskod	732G20
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning **Provnamn/benämning**	Statistisk teori I Tentamen
Institution	IDA
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5 st.
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Bertil Wegmann
Telefon under skrivtiden	070-1128321
Besöker salen ca kl.	09:30
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	annelie.almquist@liu.se, tel 2934
Tillåtna hjälpmedel	Räknedosa. Kursboken av DeGroot/Schervish
Övrigt	
Vilken typ av papper ska användas, rutigt eller linjerat	
Antal exemplar i påsen	30 st.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik
Bertil Wegmann

2013-10-24
Statistisk teori, 7.5 hp
732G20

Tentamen i Statistisk teori I, 7.5 hp

Skrivtid:	8-12
Hjälpmedel:	Räknedosa. Kursboken av DeGroot/Schervish, som ska vara fri från anteckningar, men får innehålla understrykningar/överstrykningar samt flikar för kapitel/avsnitt.
Jourhavande lärare:	Bertil Wegmann, tel. 070 – 1128321
Betygsgränser:	Tentamen omfattar totalt 25 poäng. 15 poäng ger godkänt, 20 poäng ger väl godkänd.

Redovisa och motivera alla dina lösningar.

1. Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen (p.d.f.)

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-cx} & \text{om } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där c är en konstant.

   (a) Visa att $f(x)$ är en giltig täthetsfunktion för X. 1p.
   (b) Beräkna fördelningsfunktionen (c.d.f.) för X. 1p.
   (c) Visa genom beräkning att den momentgenererande funktionen (m.g.f.) för X är $\frac{c}{c-t}$ för $t < c$. 2p.
   (d) Beräkna $E[X]$ för $c = 3$ utifrån den momentgenererande funktionen för X i uppgift 1(c). 1p.

2. Antag att du har n stycken oberoende observationer från täthetsfunktionen

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{2\theta}{x^3} \exp\left[-\frac{\theta}{x^2}\right] & \text{för } x > 0,\ \theta > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

   (a) Härled maximum likelihood-skattningen $\hat{\theta}$ av θ. 2p.
   (b) Beräkna Fisherinformationen för en observation från $f(x|\theta)$. 2p.
   (c) Beräkna den asymptotiska fördelningen för $\hat{\theta}$. 1p.

3.
   (a) Låt X vara en stokastisk variabel med täthetsfunktion $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$, $0 < x < 1$. Vilken täthetsfunktion (inklusive definitionsmängd) har $Y = 5 - \frac{X}{2}$? 2p.
   (b) Antag att X är rektangulärt fördelad på intervallet $(0, 1)$. Visa att $Y = -2\ln(X)$ är exponentialfördelad och bestäm medelvärdet i denna exponentialfördelning. 2p.
   (c) Låt X och Y vara två stokastiska variabler med simultan täthetsfunktion

$$f(x, y) = e^{-x} \text{ för } 0 < y \leq x < \infty$$

   och $f(x, y) = 0$ annars. Beräkna den marginella täthetsfunktionen, $f(x)$, för X. 1p.

4. Antag två oberoende stickprov från populationerna $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ och $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, där μ_X, σ_X^2, μ_Y och σ_Y^2 är okända. Det oberoende stickprovet från population X gav för 11 stycken observationer att $\sum_{i=1}^{11}(X_i - \bar{X})^2 = 48$ och det oberoende stickprovet från population Y gav för 8 stycken observationer att $\sum_{i=1}^{8}(Y_i - \bar{Y})^2 = 52$.

   (a) Utför följande hypotestest på 5% signifikansnivå: $H_0 : \sigma_X^2 \geq 13$ mot $H_1 : \sigma_X^2 < 13$. Drag fullständig slutsats av ditt test i ord. 2.5p.

   (b) Beräkna ett enkelsidigt 95%-igt konfidensintervall med en övre konfidensgräns för $\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}$. Tolka intervallet i ord. 2.5p.

      i. Tips för 4(b): utnyttja egenskaper från en stokastisk variabel som är F-fördelad.

5.

   (a) Antag ett oberoende stickprov $X_1, \ldots, X_n | p \overset{iid}{\sim} Binomial(N, p)$. Antag även att apriorifördelningens täthetsfunktion för p är $g(p) = \theta p^{\theta-1}$, $0 < p < 1$. Härled aposteriorifördelningen för p för ett godtyckligt stickprov $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 2p.

   (b) Beräkna aposteriorifördelningen för p i uppgift 5(a) baserat på $\theta = 9$, $N = 5$ och följande stickprov: 2, 3, 4, 4, 2, 4, 3, 2, 4, 3. 1p.

   (c) Antag ett oberoende stickprov $X_1, \ldots, X_n | \theta \overset{iid}{\sim} Poisson(\theta)$. Antag även att apriorifördelningens täthetsfunktion för θ är $g(\theta) = \frac{3}{\theta^2}$, $0 < \theta < \infty$. Härled aposteriorifördelningen för θ för ett godtyckligt stickprov $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Vad måste gälla från stickprovet för att aposteriorifördelningens täthetsfunktion ska vara giltig? 2p.