



Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

Datum för tentamen	2013-03-27
Sal (1) Om tentan går i flera salar ska du bifoga ett försättsblad till varje sal och <u>ringa in</u> vilken sal som avses	U1
Tid	8-12
Kurskod	732G20
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning Provnamn/benämning	Statistisk teori I Tentamen
Institution	IDA
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Bertil Wegmann
Telefon under skrivtiden	070 - 1128321
Besöker salen ca kl.	09:30
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	annelie.almquist@liu.se, 2934
Tillåtna hjälpmedel	Räknedosa. Kursboken av DeGroot/Schervish.
Övrigt	
Vilken typ av papper ska användas, rutigt eller linjerat	
Antal exemplar i påsen	

Tentamen i Statistisk teori I, 7.5 hp

Skrivtid: 8-12
Hjälpmedel: Räknedosa.
Kursboken av DeGroot/Schervish, som ska vara fri från anteckningar, men får innehålla understrykningar/överstrykningar samt flikar för kapitel/avsnitt.

Jourhavande lärare: Bertil Wegmann, tel. 070 – 1128321
Betygsgränser: Tentamen omfattar totalt 25 poäng. 15 poäng ger godkänt, 20 poäng ger väl godkänd.

Redovisa och motivera alla dina lösningar.

1. Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen (p.d.f.)

$$f(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3 & \text{om } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- (a) Beräkna fördelningsfunktionen (c.d.f.) för X . 1p.
(b) Beräkna medianen för X . 1p.
(c) Beräkna $E[1 - X]$. 1.5p.
(d) Beräkna $E[X^3]$. 1.5p.

i. Tips för (d): täthetsfunktion för betafördelningen, $f(x|\alpha, \beta)$, definieras i uppgift 2 nedan, där kärnan i betafördelningen är $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, $\int_0^1 f(x|\alpha, \beta) dx = 1$ och $\Gamma(k) = (k-1)!$ för ett heltal k .

2. Antag att den stokastiska variabeln X följer en betafördelning med parametrarna α och β enligt:

$$f(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & \text{för } 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- (a) Låt $Y = 1 - X$ och låt $\alpha = 2$, $\beta = 5$ i betafördelningen för X . Visa att Y också är betafördelad och bestäm värdena på motsvarande parametrar i denna betafördelning. 2p.
(b) Låt $Y = -\ln X$ och låt $\beta = 1$ i betafördelningen för X . Visa att Y är exponentialfördelad med parameter α (tips: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$). 2p.
(c) Bestäm värdet på α i uppgift (b) ovan då $E[Y] = \text{Var}(Y)$. 1p.

3. Antag att du har n stycken oberoende observationer från en lognormalfördelning med täthetsfunktion

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] & \text{för } x > 0, \sigma^2 > 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- (a) Härled maximum likelihood-skattningen $\hat{\mu}$ av μ . 2p.
- (b) Härled maximum likelihood-skattningen $\hat{\theta}$ av θ givet $\mu = \hat{\mu}$, där $\theta = \sigma^2$. 2p.
- (c) Tag fram maximum likelihood-skattningen $\hat{\sigma}$ av σ . 1p.
4. Antag ett oberoende stickprov från populationen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Stickprovet med 13 stycken observationer gav $\sum_{i=1}^{13} (x_i - \bar{x})^2 = 49.12$.
- (a) Bestäm den konfidsensgrad som användes i stickprovet för ett dubbelsidigt konfidsensintervall för μ , där längden på konfidsensintervallet var 2. 2.5p.
- (b) Utför följande hypotestest på 5 % signifikansnivå: $H_0 : \sigma^2 = 10$ mot $H_1 : \sigma^2 \neq 10$. Drag fullständig slutsats av ditt test i ord. 2.5p.
- 5.
- (a) Antag ett oberoende stickprov $X_1, \dots, X_{10} | p \stackrel{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$. Antag även en konjugerad apriorifördelning för p sådan att den ena parametern $\alpha = 1$ och $E[p] = \frac{1}{2}$. Härled aposteriorifördelningen för p för ett godtyckligt stickprov x_1, x_2, \dots, x_{10} . 2p.
- (b) Beräkna aposteriorifördelningen för p i uppgift 5(a) baserat på att $\bar{x} = 5$ från stickprovet. 1p.
- (c) Antag ett oberoende stickprov $X_1, \dots, X_5 | \theta \sim \text{Exponential}(\theta)$. Antag även att apriorifördelningen för θ följer en exponentialfördelning med parametern $\beta = 2$. Härled och beräkna aposteriorifördelningen för θ för ett stickprov med medelvärde $\bar{x} = 1$. 2p.