Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings Universitet

Datum för tentamen	2012-10-31
Sal (1) Om tentan går i flera salar ska du bifoga ett försättsblad till varje sal och ringa in vilken sal som avses	TER3
Tid	8-12
Kurskod	732G20
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning **Provnamn/benämning**	Statistisk teori I Tentamen
Institution	IDA
Antal uppgifter som ingår i tentamen	5
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Bertil Wegmann
Telefon under skrivtiden	070 – 1128321
Besöker salen ca kl.	9 : 30
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	carita.lilja@liu.se tel 1463
Tillåtna hjälpmedel	Räknedosa, Kursboken
Övrigt	Anvisningar av hur kursboken får användas, se tentamen.
Vilken typ av papper ska användas, rutigt eller linjerat	Rutigt
Antal exemplar i påsen	

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för datavetenskap
Avdelningen för statistik
Bertil Wegmann

2012-10-31
Statistisk teori, 7.5 hp
732G20

Tentamen i Statistisk teori I, 7.5 hp

Skrivtid:	8-12
Hjälpmedel:	Räknedosa. Kursboken av DeGroot/Schervish, som ska vara fri från anteckningar, men får innehålla understrykningar/överstrykningar samt flikar för kapitel/avsnitt.
Jourhavande lärare:	Bertil Wegmann, tel. 070 − 1128321
Betygsgränser:	Tentamen omfattar totalt 25 poäng. 15 poäng ger godkänt, 20 poäng ger väl godkänd.

Redovisa och motivera alla dina lösningar.

1. Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen (p.d.f.)

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-ln\,2} & \text{om } ln\,2 < x < ln\,4 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

   (a) Beräkna fördelningsfunktionen (c.d.f.) för X 1p.

   (b) Beräkna medianen för X. 1p.

   (c) Bestäm den moment-genererande funktionen för X. 2p.

   (d) Beräkna väntevärdet för X. 1p

      i. Tips I för (d): derivatan av $\frac{f(t)}{g(t)}$ är lika med $\frac{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)}{[g(t)]^2}$ där $f'(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t}$ och $g'(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial t}$ eller Tips II för (d): partiell integration: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$.

2.

   (a) Antag att X är rektangulärt fördelad på intervallet $(12, 18)$. Härled fördelningen för $Y = -X/3$. 2p.

   (b) Låt $X \sim Exp(\lambda)$ och $Y = \sqrt{X}$. Visa att Y är Rayleighfördelad (täthetsfunktion i uppgift 3) och bestäm parametern θ för Rayleighfördelningens täthetsfunktion i uppgift 3 som en funktion av parametern λ. 2p.

   (c) Låt X och Y vara två stokastiska variabler med simultan täthetsfunktion

$$f(x,y) = c(x^2 + y) \text{ för } -1 < x < 1 \text{ och } 0 \le y \le 1 - x^2$$

   och $f(x,y) = 0$ annars. Beräkna den betingade fördelningen $f(y|x)$. Var noga med att förenkla uttrycket för $f(y|x)$ så långt som möjligt. 1p.

3. Antag att du har n stycken oberoende observationer från en Rayleighfördelning med täthetsfunktion

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} e^{-x^2/2\theta} & \text{för } x > 0, \text{ och } \theta > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

(a) Härled maximum likelihood-skattningen $\hat{\theta}$ av θ. Vi har att $E[X^2] = 2\theta$. Är skattningen unbiased? Motivera! 2p.

(b) $E[X^2] = 2\theta$. Beräkna Fisherinformationen (för en observation från $f(x|\theta)$). 2p.

(c) Beräkna den asymptotiska fördelningen för $\hat{\theta}$. 1p.

4. Antag två oberoende stickprov från populationerna $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ och $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Det oberoende stickprovet från fördelningen för X observerar du på formen $\bar{X} = 169.2$ och $V = |X - \bar{X}|$: $v_1 = 6.8$, $v_2 = 12.2$, $v_3 = 5.8$, $v_4 = 17.2$, $v_5 = 16.8$. Det oberoende stickprovet från fördelningen för Y observerar du på formen $W = Y - \bar{Y}$: $w_1 = -5.2$, $w_2 = 4.8$, $w_3 = -3.1$, $w_4 = 6.3$, $w_5 = 4.9$.

   (a) Beräkna ett dubbelsidigt 95%-igt konfidensintervall för μ_X. Tolka intervallet i ord. 2.5p.

   (b) Utför följande hypotestest på 5% signifikansnivå: $H_0 : \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ mot $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$. Drag fullständig slutsats av ditt test i ord. 2.5p.

5. Antag ett oberoende stickprov $X_1, \ldots, X_n|\theta \overset{iid}{\sim} N(\theta, 1)$. Antag även att person W har apriorifördelningen $\theta_W \sim N(\mu_0, \nu_0^2)$ och person Y har apriorifördelningen $\theta_Y \sim N(1, 1)$.

   (a) Person W erhåller medelvärdet 0.6 och varians 0.045 i sin aposteriorifördelning baserat på ett stickprov om $n = 20$ observationer med medelvärdet 0.5. Bestäm medelvärdet μ_0 och variansen ν_0^2 i apriorifördelningen för person W. 2p.

   (b) Bestäm aposteriorisannolikheten $P[\theta_Y|x_1, \ldots, x_n > 1]$ för person Y baserat på stickprovet i (a). 2p.

   (c) Hur stort stickprov n måste man minst dra för att erhålla en maximal varians på 0.01 i aposteriorifördelningen för person Y? 1p.