Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
725G93, STN1 Diskret matematik och logik, 5 hp
2020-01-09

---

1. Vi har $A = \{b, c, d, e\}$ och grundmängden $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f\}$.

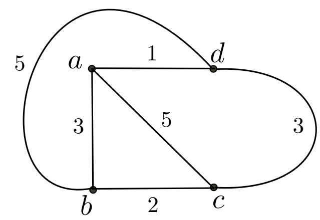
   a) Samtliga delmängder till A som har två element är:
   $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{d, e\}$.

   b) Antalet delmängder till A som innehåller elementet e kan vi räkna ut genom att tänka att elementet e har valts och att vi för de övriga tre elementen kan välja om de ska vara med eller inte. Det ger tre val med två möjligheter i varje val, alltså $2^3 = 8$ delmängder, enligt multiplikationsprincipen.

   c) Vi har $B = \{a, d, e\}$ samt A och $\mathcal{U}$ enligt ovan. Då $A^c = \{a, f\}$ får vi:
   $(A^c \cap B)^c \setminus B = (\{a, f\} \cap \{a, d, e\})^c \setminus \{a, d, e\} = \{a\}^c \setminus \{a, d, e\} =$
   $\{b, c, d, e, f\} \setminus \{a, d, e\} = \{b, c, f\}$.

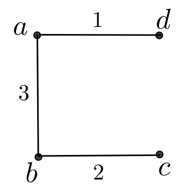
   Svar: a) Delmängder till A med två element är $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{d, e\}$.
   b) Det finns 8 delmängder till A som innehåller elementet e.
   c) $(A^c \cap B)^c \setminus B = \{b, c, f\}$.

2. G är den enkla viktade grafen i figuren intill.

   a) Ja, G är en fullständig graf då alla par av noder har en båge mellan sig. (Jämför med K_4).

   b) Enligt sats har en graf en öppen eulerväg om precis två noder har udda gradtal och en sluten eulerväg och alla noder har jämnt gradtal. Då alla fyra noderna i G har gradtal 3, som är udda, så har den varken en öppen eller en sluten eulerväg.

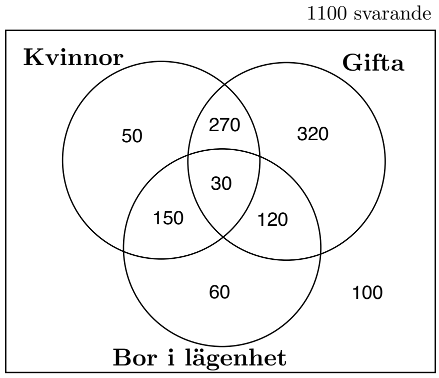
   

   c) Vi väljer att använda Kruskals algoritm och startar enligt den med noderna utan några bågar. Kostnaderna anges i parantes efter bågarna nedan.
   Välj den billigaste bågen $a - d$ (1). Nästa billigaste båge är $b - c$ (2), väljs då cykel ej bildas. Nästa billigaste båge är $a - b$ (3) respektive $c - d$ (3). En av dessa kan väljas utan att cykel bildas, men inte båda. Vi väljer $a - b$. Då tre bågar har valts avbryts algoritmen och vi har fått ett billigaste nätverk enligt figuren intill med kostnaden 1+2+3=6.

   Svar: a) G är en fullständig graf.
   b) G har varken öppen eller sluten eulerväg, se motivering ovan.
   c) Billigaste nätverk anges ovan och har kostnaden 6.

3. Utifrån ?, ?, 8, 32, 128, 512, ... ser vi att varje ny term i talföljden är 4 gånger större än talet innan.
   a) Vi kan då få de första två talen genom istället dividera med 4.
   Det ger $a_2 = \frac{8}{4} = 2$ och därefter $a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
   b) Med första talet $\frac{1}{2}$ och en faktor 4 i tillväxt så får vi uttrycket för det n-te talet som $a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n$, där $n = 0, 1, 2, \ldots$ (alt. $a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^{n-1}$, där $n = 1, 2, 3 \ldots$)
   c) Talet 1024 finns inte i denna talföljd. Talet efter talet 512 är 2048, då de växer med faktorn 4, och följande tal är alla större.

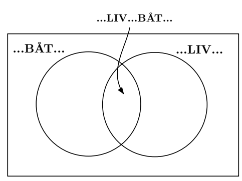
4. Vi använder ett venndiagram för att lösa problemet och för att hålla ordning på de överlapp som bildas mellan de tre kategorierna ”Kvinnor”, ”Gifta” och ”Bor i lägenhet”. Genom att börja längst in (gifta kvinnor som bor i lägenhet) kan vi sedan successivt räkna ut hur många det finns i varje område utifrån de antal som ges i uppgiften. När samtliga områden inom de tre cirklarna är uträknade kan dessa summeras: 500 (kvinnor) $+ 320 + 120 + 60 = 1000$ personer. Alltså finns det 100 personer i området utanför cirklarna, då det var 1100 som svarade. Vi noterar att alla utanför cirkeln Kvinnor är män och kan nu besvara frågorna.



   a) Antalet män som bodde i lägenhet är de 120+60=180 st som ligger utanför cirkeln Kvinnor, men inom cirkeln Bor i lägenhet.
   b) De ogifta männen som inte bor i lägenhet är de som är utanför alla tre cirklarna, det vill säga 100 stycken.

Svar: a) 180 personer av de svarande var män som bodde i lägenhet.
b) 100 ogifta män bodde inte i lägenhet.

5. a) Vi utgår från bokstäverna BLIVTVÅL och noterar att det finns två V och två L. Vi sätter ihop BÅT som en symbol och omordnar den med de övriga 5 bokstäverna. Det ger 6! olika permutationer som innehåller BÅT, men då vi har två V och två L får vi samma följd när v:na respektive L:n byter plats. Vi dividerar därför med 2 för vardera dubblett. Vi får $\dfrac{6!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{720}{4} = \mathbf{180}$ olika följder som innehåller BÅT.
   b) För att räkna ut de som inte innehåller LIV eller BÅT räknar vi först ut de som *innehåller* LIV eller BÅT och drar sedan bort det från det totala antalet följder med dessa 8 bokstäver. Antalet som innehåller BÅT är **180** enligt a). Antalet som innehåller LIV kan vi få på ett liknande sätt, men när LIV blir en symbol är de övriga bokstäverna B, T, V, Å och L, så där finns inga dubbletter. Antalet följder som innehåller LIV blir därför 6! = **720** stycken. Om vi adderar antalet som innehåller LIV och antalet som innehåller BÅT så får vi med de som innehåller både LIV och BÅT två gånger. Om vi sätter LIV som en symbol och BÅT som en symbol så har vi kvar L och V som enskilda bokstäver, vilket ger 4! = **24** sådana följder.



Var god vänd!

Vi kan nu räkna ut antalet som innehåller LIV eller BÅT som $180 + 720 - 24 = \mathbf{876}$.
Det totala antalet följder fås på samma sätt som ovan. 8 symboler varav dubbletter av V och L ger $\frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = \mathbf{10\,080}$ olika följder.
Antalet som varken innehåller LIV eller BÅT blir då $10\,080 - 876 = \mathbf{9204}$.

Svar: a) 180 bokstavsföljder innehåller följden BÅT.
b) 9204 bokstavsföljder innehåller varken följden LIV eller BÅT.

6. Vi har slutledningen:

Om tomten kommer så får jag paket. Det är julafton. Om jag inte varit snäll så kommer inte tomten. Om det är julafton och jag varit snäll så kommer tomten. Jag har varit snäll. Alltså får jag paket.

Vi inför följande satsparametrar:
p: Tomten kommer, q: Jag får paket,
r: Det är julafton, s: jag har varit snäll.

Slutledningen kan då skrivas som följande satslogiska uttryck:

$$(p \to q) \land r \land (\neg s \to \neg p) \land (r \land s \to p) \land s \;\Rightarrow\; q$$

Vi kan visa att detta är en korrekt slutledning med sanningsvärdestabell, deduktion eller reduktionsmetoden. Vi väljer här att göra det med deduktion då det blir klart kortast i detta fall.

1.)	r	Förutsättning.
2.)	s	Förutsättning.
3.)	$r \land s$	1.), 2.) och Konjunktionsregeln.
4.)	$r \land s \to p$	Förutsättning.
5.)	p	3.), 4.) och Modus ponens.
6.)	$p \to q$	Förutsättning.
7.)	q	5.), 6.) och Modus ponens.

Vi har härlett slutsatsen q ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt. (Man kan notera att förutsättningen ”Om jag inte varit snäll kommer inte tomten” inte behövs för slutsatsen.)

Svar: Slutledningen är korrekt. Se satslogiskt uttryck och härledning ovan.

7. a) Enligt satsen för träd gäller att $N = B + 1$, där N är antalet noder och B är antalet bågar. Om vi sätter antalet löv i grafen till x så kan vi utifrån uppgiften se att antalet noder är $N = x + 2 + 6 + 3 = 11 + x$. Antalet bågar kan vi också uttrycka i x med hjälp av handskakningslemmat som säger att summan av gradtalen är två gånger antalet bågar. Vi får då:
$B = \frac{\text{summan av gradtalen}}{2} = \frac{1 \cdot x + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6}{2} = \frac{x + 48}{2}$.
Vi kan nu sätta in $N = 11 + x$ och $B = \frac{x+48}{2}$ i sambandet för träd ovan:
$N = B + 1 \;\Leftrightarrow\; 11 + x = \frac{x+48}{2} + 1 \;\Leftrightarrow\; 10 + x = \frac{x+48}{2} \;\Leftrightarrow\; 20 + 2x = x + 48$
$\Leftrightarrow\; 2x = x + 28 \;\Leftrightarrow\; x = 28.$ Grafen har alltså 28 löv.

Var god vänd!

b) Med 28 löv får trädet G alltså $11 + 28 = 39$ noder.

Den fullständiga grafen med med n noder har vi visat har $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ bågar.

(Man får samma uttryck om man tänker $n - 1$ bågar utifrån en nod och multiplicerar med n noder och sedan delar med 2 för att inte räkna alla bågar i båda ändar.)

Den fulständiga grafen med 39 noder (K_{39}) har då $\dfrac{39 \cdot 38}{2} = 39 \cdot 19 = 741$ bågar.

Ett träd med 39 noder har 38 bågar enligt sambandet för träd, så vi kan räkna ut hur många fler bågar K_{39} har jämfört med trädet G genom att dra bort 38 från 741. Vi får $741 - 38 = 703$.

Svar: a) Trädet G har 28 löv.

b) Den fullständiga grafen med lika många noder som G har 703 fler bågar.