Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
725G93, STN1 Diskret matematik och logik, 5 hp
2019-04-24

---

1. Vi har $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $B = \{x \in A \mid x \text{ är ett udda tal}\} = \{1, 3, 5\}$ som delmängder i $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

   a) Vi får då $A^c \cap B = \{6, 7\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset$.

   b) $B^c \cap A = \{2, 4, 6, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 4\}$.
   Denna mängd har delmängderna $\emptyset$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2, 4\}$.

   c) Då $\mathcal{U}$ har 7 element har den $2^7 = 128$ delmängder, men inte alla dessa har $B = \{1, 3, 5\}$ som delmängd. De aktuella delmängderna måste innehålla elementen 1, 3 och 5. De element som kan väljas till är då 2, 4, 6 eller 7. För vardera av dessa fyra element kan vi välja om de ska vara med eller inte med. Det ger totalt $2^4 = 16$ olika delmängder till $\mathcal{U}$ som har B som delmängd, enligt multiplikationsprincipen.

   Svar: a) $A^c \cap B = \emptyset$. b) $B^c \cap A = \{2, 4\}$ som har delmängderna $\emptyset$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2, 4\}$.
   c) Det finns 16 delmängder till $\mathcal{U}$ som har B som delmängd.

2. a) $4, 11, 18, 25, 32 \ldots$
   Vi ser att varje nytt tal i följden är 7 större än det tidigare. Med start på värdet 4 kan vi skriva talföljden som $a_n = 4 + 7n$, där $n = 0, 1, 2, \ldots$
   Det 26:e talet fås då när $n = 25$, vilket ger $a_{25} = 4 + 7 \cdot 25 = 4 + 175 = 179$.
   Det 26:e talet i följden är 179.

   b) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27 \ldots$
   Vi ser att varje nytt tal i följden är 3 gånger större än det tidigare. Med start på $\frac{1}{3}$ kan vi skriva talföljden som $a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^n = 3^{n-1}$, där $n = 0, 1, 2, \ldots$
   Det 26:e talet fås då när $n = 25$, vilket ger $a_{25} = 3^{25-1} = 3^{24}$.
   Det 26:e talet i följden är 3^{24}.

   Svar: a) $a_n = 4 + 7n$, där $n = 0, 1, 2, \ldots$ Det 26:e talet i följden är 179.
   b) $a_n = 3^{n-1}$, där $n = 0, 1, 2, \ldots$ Det 26:e talet i följden är 3^{24}.

3. Vi har 23 olika bokstäver och 10 olika siffror att använda för nummerplåtarna. Med den nya modellen finns det då 10+23=33 symboler att använda för den sista positionen.

   a) Antalet nummerplåtar som inleds med HEJ har redan bestämda bokstäver på de första tre platserna. På plats fyra och fem har vi vardera 10 siffror att välja på och på sista positionen har vi enligt ovan 33 möjligheter. Multiplikationsprincipen ger då $10 \cdot 10 \cdot 33 = 3300$ olika nummmerplåtar som inleds med HEJ.

Var god vänd!

b) Antalet som slutar med 007 kan fås genom att beräkna hur många olika sätt vi kan välja bokstäver. Då vi har 23 möjligheter på vardera plats får vi enligt multiplikationsprincipen $23 \cdot 23 \cdot 23 = 23^3$ =12 167 olika nummmerplåtar som slutar med 007.

c) Nummerplåtar som börjar och slutar med A och bara innehåller udda siffror har två bokstvasplatser med 23 möjligheter och två sifferplatser med vardera 5 möjligheter, då bara de udda siffrorna 1, 3, 5, 7, 9 får väljas. Enligt multiplikationsprincipen finns det då $23 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 5 = 23^2 \cdot 5^2$ =13 225 sådana nummerplåtar.

Svar: a) 3300 b) $23^3 = 12\ 167$ c) $23^2 \cdot 5^2 = 13\ 225$

4. a) Vi visar att $\neg(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r)$ med en sanningsvärdestabell.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	VL: $\neg(p \wedge q) \vee r$	$\neg p$	$q \rightarrow r$	HL: $\neg p \vee (q \rightarrow r)$
1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

Då VL och HL har samma sanningsvärde på alla rader så är
$\neg(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r)$.

b) Slutledningen $\neg s \wedge (p \rightarrow s) \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg q$ är ej korrekt. Om p är falsk, q sann och s falsk så är alla förutsättningar sanna (kontrollera det), men slutsatsen $\neg q$ falsk! Denna uppsättning sanningsvärden utgör alltså ett motexempel som visar att $\neg q$ inte är en korrekt slutsats ur dessa förutsättningar.

Svar: a) Ekvivalens gäller. Se sanningsvärdestabell ovan.
b) Slutledningen är ej korrekt. Se motexempel ovan.

5. a) Summan av gradtalen blir i detta fall $3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 18 \cdot 1 = 15 + 28 + 18 = 61$, vilket är ett udda tal. Enligt handskakningslemmat är summan av gradtalen alltid ett jämnt tal (varje båge har två ändar) så någon sådan graf existerar ej.

b) Vi har 20 noder av grad 1 och kallar antalet noder av grad 4 för x.
För träd gäller att $N = B + 1$, där N är antalet noder och B är antalet bågar. Med informationen i uppgiften kan både N och B kan uttryckas i x:

$N = 20 + x$.

$B = \frac{\text{Summan av gradtalen}}{2} = \frac{4 \cdot x + 1 \cdot 20}{2} = 2x + 10$ (B fås ur Handskakningslemmat)

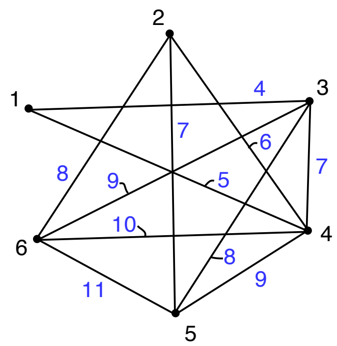
Dessa uttryck för N och B insatt i ekvationen för träd ($N = B + 1$) ger:

$20 + x = 2x + 10 + 1 \Leftrightarrow 20 + x = 2x + 11 \Leftrightarrow 9 + x = 2x \Leftrightarrow 9 = x$.

Vi har alltså nio noder av grad 4 i grafen.

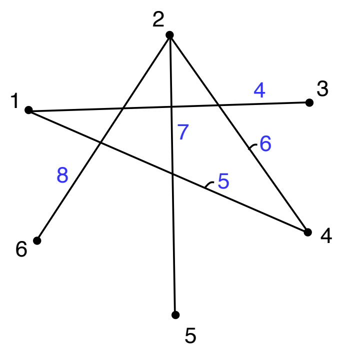
Svar: a) Nej, en sådan graf finns ej utifrån handskakningslemmat.
b) Grafen har nio noder av grad 4.

6. a) Med grannmatrisen i uppgiften får vi grafen G som visas i figuren intill. Noderna är numrerade med svarta siffror. I grafen har vi också angett kostnaden för varje båge med blå siffror för uppgift b). Grafen har en hamiltoncykel, till exempel $1-4-2-6-5-3-1$.



b) Vi skapar nu ett billigaste spännande träd med hjälp av Kruskals algoritm. Kostnaderna anges i parantes.

Starta med noderna 1 till 6 utan några bågar. -**Välj** den billiagste bågen: 1-3 (4). -Billigaste bågen bland de återstående är 1-4 (5) och den **väljs** då cykel ej bildas. -Billigaste bågen bland de återstående är 2-4 (6) och den **väljs** då cykel ej bildas. -Billigaste bågen bland de återstående är de med kostnad 7. 3-4 **väljs ej** då cykel bildas, men 2-5 **väljs** då cykel ej bildas. -Billigaste bågen bland de återstående är de med kostnad 8. 2-6 kan **väljas** utan att cykel bildas.



Vi har nu valt fem bågar och avbryter därför algoritmen då ett träd med 6 noder har fem bågar enligt samband för träd. Vi får resultatet som visas ovan och kostnaden för detta billigaste spännande träd är $4+5+6+7+8=30$.

Svar: a) Se graf ovan. En hamiltoncykel är till exempel $1-4-2-6-5-3-1$.
b) Minimalt spännande träd (billigaste nätverk) visas ovan. Kostnaden är 30.

7. Vi vill visa att den logiska implikationen $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \;\Rightarrow\; A = B$ gäller för alla mängder A och B i någon grundmängd $\mathcal{U}$.

Låt x vara ett godtyckligt element i grundmängden $\mathcal{U}$ i vilken A och B är delmängder. Vi formulerar satserna:

p : x tillhör A.
q : x tillhör B.

Implikationen ovan är då ekvivalent med att det för varje $x \in \mathcal{U}$ gäller att:

$$(p \to q) \wedge (q \to p) \;\Rightarrow\; p \leftrightarrow q$$

Vi kan visa att detta är en korrekt logisk implikation med hjälp av sanningsvärdestabell. R nedan betecknar vänsterledet i slutledningen.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	R	$p \leftrightarrow q$	$R \to (p \leftrightarrow q)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Då implikationen i slutledningen är sann på alla rader (sista kolumn) så gäller den ursprungliga implikationen för alla mängder A och B.

Svar: Se bevis ovan.