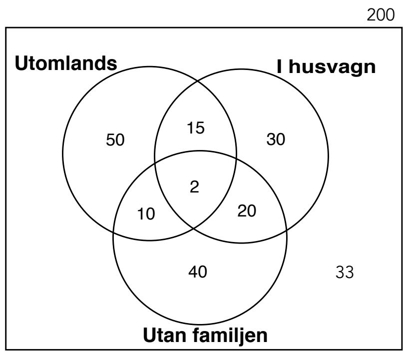
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen 725G93, STN1 Diskret matematik och logik, 5 hp 2019-04-24

---

1. Vi använder ett venndiagram för att analysera problemet och hantera överlapp i den givna information. Börjar vi längst in kan vi successivt räkna ut hur många personer som finns i respektive område med den information vi har i uppgiften. Om vi sedan adderar de vi fått fram inom cirklarna får vi: $50 + 10 + 40 + 20 + 30 + 15 + 2 = 167$. Om vi drar bort detta från 200 så får vi de som finns utanför cirklarna: $200 - 167 = 33$



Vi kan nu besvarar frågorna:

Antalet som semestrar utomlands med familjen, men då inte bor i husvagn är de 50 som finns i cirkeln "utomlands", men utanför de andra två cirklarna. Svaret på fråga a) är alltså 50 stycken av de svarande.

Antalet som semestrar i Sverige med familjen, men då inte bor i husvagn är istället de 33 som finns utanför alla tre cirklarna. Svaret på fråga b) är därför 33 stycken av de svarande.

Svar:

a) 50 personer av de svarande semestrar utomlands med familjen, men bor då inte i husvagn.

b) 33 personer av de svarande semestrar i Sverige med familjen, men bor då inte i husvagn.

2. S_1: $(p \to q) \to r$ och S_2: $(\neg p \vee r) \vee (q \to r)$.

Vi använder en sanningsvärdestabell för att besvara frågorna.

p	q	r	$p \to q$	r	S_1: $(p \to q) \to r$	$\neg p$	$\neg p \vee r$	$q \to r$	S_2: $(\neg p \vee r) \vee (q \to r)$	$S_1 \to S_2$	$S_2 \to S_1$
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0

Var god vänd!

Då sanningsvärdestabellerna för S_1 och S_2 skiljer sig åt på rad 6 och 8 så är de inte logiskt ekvivalenta. I näst sista kolumnen ser vi att $S_1 \to S_2$ är en tautologi, så S_1 implicerar S_2. I sista kolumnen ser vi att $S_2 \to S_1$ inte är en tautologi då vi får nollor på rad 6 och 8, så S_2 implicerar inte S_1. Implikationerna kan också uttryckas som att S_2 är en konsekvens av S_1, men att S_1 inte är en konsekvens av S_2.

Svar:

S_1 och S_2 är inte logiskt ekvivalenta. S_1 implicerar S_2, men S_2 implicerar inte S_1.

3.

$$?,\ ?,\ 10,\ 50,\ 250,\ 1250, \ldots$$

a) Vi ser utifrån de följande talen att ett tal i följden är 5 gånger talet innan. Vi kan då få fram de två första talen genom att istället dividera med 5.

Vi får $a_2 = \frac{10}{5} = 2$ och $a_1 = \frac{2}{5}$.

b) Med det första talet som $\frac{2}{5}$ och en upprepad multiplikation med 5 kan vi skriva talen i följden som:

$$a_n = \frac{2}{5} \cdot 5^{n-1} = 2 \cdot 5^{n-2}, \text{ där } n = 1, 2, 3 \ldots$$

c) Vi kan räkna ut ett par ytterligare tal i följden:

$$\frac{2}{5},\ 2,\ 10,\ 50,\ 250,\ 1250,\ 6250, 31250 \ldots$$

Vi ser att nästa tal kommer bli drygt 150 000 (156 250) och därmed det första tal som är större än 50 000. $n = 9$ är alltså det minsta värde på n där talen överstiger 50 000.

Svar: a) De första två talen är $a_1 = \dfrac{2}{5}$ och $a_2 = 2$.

b) $a_n = 2 \cdot 5^{n-2}$, där $n = 1, 2, 3 \ldots$

c) Det nionde talet i följden är det första som överstiger 50 000.

4. En undersökning i venndiagram visar att a) inte gäller, medan b) gör det. Vi ger därför ett motexempel för likheten i a) samt ett bevis för likheten i b).

a) $((B \cup C) \cap A) \setminus C = (B \setminus (A \cap C)) \setminus (B \cap C)$

Likheten gäller ej och vi ger ett motexempel.

Låt $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$ och $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$. Då är

VL$= ((B \cup C) \cap A) \setminus C = (\{b, c\} \cap \{a\}) \setminus \{c\} = \emptyset \setminus \{c\} = \emptyset$, medan

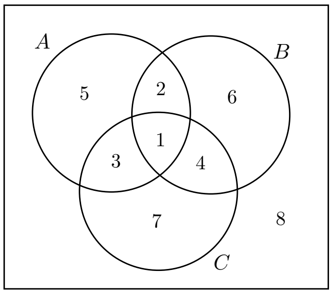
HL$= (B \setminus (A \cap C)) \setminus (B \cap C) = (\{b\} \setminus (\{a\} \cap \{c\})) \setminus (\{b\} \cap \{c\}) = (\{b\} \setminus \emptyset) \setminus \emptyset = \{b\}$.

Då vänster- och högerled i exemplet ovan inte är lika gäller alltså inte påståendet för alla mängder A, B och C.

Var god vänd!

b) $(A \cap B^c) \setminus C^c = (A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$

Vi använder ett numrerat venndiagram och går igenom operationerna i vänsterled och högerled var för sig och ser vilka områden de svarar mot.



VL:	HL:
A: 1,2,3,5	$A \cap C$: 1,3
B: 1,2,4,6	$A \cap B \cap C$: 1
B^c: 3,5,7,8	HL=$(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$: 3
$A \cap B^c$: 3,5	
C: 1,3,4,7	
C^c: 2,5,6,8	
VL=$(A \cap B^c) \setminus C^c$: 3	

Då VL och HL svarar mot samma område i det numrerade venndiagrammet ovan har vi visat att likheten gäller för alla mängder A, B och C.

Svar: Se motexempel för likheten i a) och bevis för likheten i b) ovan.

5. Låt x vara antalet noder av grad 5. Vi har då de noder med gradtal som listas intill. För träd gäller att $N = B + 1$, där N är antalet noder och B är antalet bågar. Vi har antalet noder $N = 23 + 5 + 5 + 2 + x \Leftrightarrow N = 35 + x$.

23 noder av grad 1
5 noder av grad 2
5 noder av grad 3
2 noder av grad 4
x noder av grad 5

Enligt handskakningslemmat gäller att summan av gradtalen $= 2 \cdot B$, så ur gradtalen kan vi få fram B. Med informationen om antalet noder och gradtalen får vi:

$$B = \frac{\text{Summan av gradtalen}}{2} = \frac{23 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + x \cdot 5}{2} = \frac{56 + 5x}{2}.$$

Uttrycken för N och B insatt i sambandet för träd ($N = B + 1$) ger då ekvationen:

$$N = B + 1 \Leftrightarrow 35 + x = \tfrac{56+5x}{2} + 1 \Leftrightarrow 34 + x = \tfrac{56+5x}{2} \Leftrightarrow 68 + 2x = 56 + 5x \Leftrightarrow$$

$12 + 2x = 5x \Leftrightarrow 12 = 3x \Leftrightarrow 4 = x$. Grafen har alltså fyra noder av grad 5.

Svar: Grafen har fyra noder av grad 5.

6. a) Ordet TENTAMEN består av åtta bokstäver där T, E och N förekommer i dubbletter. Antalet olika bokstavsföljder kan vi få genom att omordna de åtta bosktäverna på alla möjliga sätt (8! sätt) och sedan dividera med 2 för vardera dubblett, då vi får samma bokstavsföljd när dessa byter plats. Det ger: $\dfrac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 5040$ olika bokstavsföljder.

b) Antalet följder som inte innehåller två T intill varandra kan vi få genom att beräkna antalet som innehåller TT och sedan dra bort dem från det totala antalet i a). Vi tänker att vi skriver TT på en lapp och övriga bokstäver på separata lappar. Vi får då 7 lappar att omordna, men får även här dividera med 2 för de dubbla lapparna av E respektive N. Vi får: $\dfrac{7!}{2 \cdot 2} = \dfrac{5040}{4} = 1260$.

Vilket ger att antalet utan två T intill varandra är $5040 - 1260 = 3780$.

Svar: a) 5040 olika bokstavsföljder. b) 3780 innehåller inte två T intill varandra.

Var god vänd!

7. Vi har följande fem förutsättningar:

   1) Den skyldige har lämnat många spår efter sig.
   2) Om det inte är ett politiskt mord och inte utfört av en kvinna så måste det vara rånmord.
   3) Vid politiska mord försvinner mördaren omedelbart.
   4) Om det finns många spår så lämnade inte mördaren platsen genast.
   5) Mordet var inte rånmord.

   Låt nu p: Den skyldiga har lämnat många spår, q: Det är ett politiskt mord, r: Mördaren är en kvinna, s Det är rånmord, t: mördaren försvann omdelbart från platsen.

   På satslogisk form blir då Sherlocks slutledning:

   $p \wedge (\neg q \wedge \neg r \to s) \wedge (q \to t) \wedge (p \to \neg t) \wedge \neg s \;\Rightarrow\; r$

   Vi visar att slutledningen är riktig med hjälp av deduktion:

1)	p	Förutsättning
2)	$p \to \neg t$	Förutsättning
3)	$\neg t$	1, 2 och Modus Ponens
4)	$q \to t$	Förutsättning
5)	$\neg q$	3, 4 och Modus Tollens
6)	$\neg s$	Förutsättning
7)	$\neg q \wedge \neg r \to s$	Förutsättning
8)	$\neg(\neg q \wedge \neg r)$	6, 7 och Modus Tollens
9)	$q \vee r$	8 och De Morgans lag
10)	r	5, 9 och Disjunktiv syllogism

   Vi har alltså härlett r: Mördaren är en kvinna, som en logisk konsekvens ur förutsättningarna. (Slutledningen kan också göras med hjälp av sanningsvärdestabell (32 rader) eller med reduktionsmetoden.)

   Svar: Sherloks slutsats är korrekt. Se härledning ovan.