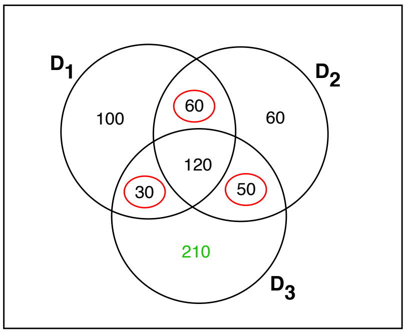
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
725G93, STN1 Diskret matematik och logik, 5 hp
2019-01-09

---

1. Vi använder ett venndiagram för att analysera problemet. Börjar vi längst in kan vi successivt räkna ut hur många personer som finns i respektive område med den information vi har i uppgiften. Detta ger de svarta siffrorna i vidstående venndiagram. De aktuella 630 personerna finns alla inom cirklarna D_1, D_2 och D_3. Genom att dra bort de vi nu känner från 630 kan vi få fram antalet som bara finns i D_3. Vi får:



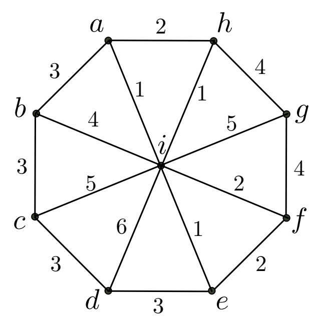
$100 + 60 + 30 + 120 + 60 + 50 = 420$, vilket ger $630 - 420 = 210$, som vi fyller i ovan.

Antalet personer som har uppgifter om sig i D_3 blir därmed: $120+30+50+210 = 410$.

Att man tillhör precis två innebär att man ligger i någon av snitten mellan mängderna, men inte där alla tre mängderna överlappar varandra.Vi får alltså de som är inringade med rött i figuren. Det ger $60+30+50 = 140$ personer som finns i precis två av dessa databaser.

Svar: 410 personer har uppgifter om sig i D_3. 140 personer har uppgifter i precis två databaser.

2. G är grafen med noderna a till i och de bågar som visas i figuren nedan.

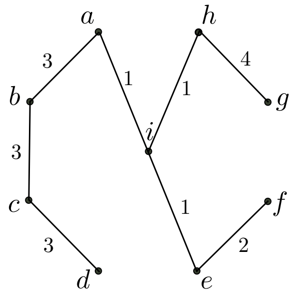


a) En fullständig eller komplett graf är en graf där det finns en båge mellan varje par av noder. Grafen G är ej fullständig då det saknas bågar mellan många nodpar. Till exempel finns inte bågarna (a, c), (a, d), (a, e) med flera.

b) G har en hamiltoncykel, till exempel: $a - b - c - d - e - f - g - h - i - a$.

Enligt sats finns en öppen eulerväg då precis två noder har udda gradtal och en sluten eulerväg då alla noder har jämnt gradtal, men då alla noderna a till h har gradtal 3, vilket är udda, finns varken en öppen eller en sluten eulerväg.

c) Ett minimalt spännande träd (billigaste nätverk) anges i figuren intill och har kostnaden 18. (Det finns i detta fall fler billigaste nätverk. (g,h) kan bytas mot (f,g), (e,f) kan bytas mot (f,i) och i de fyra bågarna från a till e med kostnad 3 kan en valfri tas bort.)



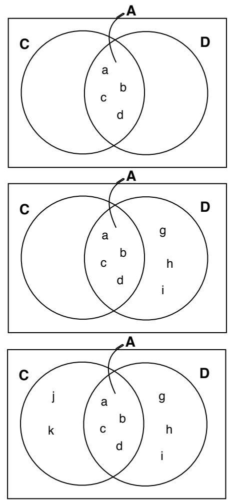
Svar: a) Grafen G är ej fullständig. Se motivering ovan.
b) Det finns en hamiltoncykel, men ej någon öppen eller sluten eulerväg. Se exempel och motivering ovan.
c) Billigaste nätverk har kostnaden 18. Se exempel ovan.

3. Vi har grundmängden $\mathcal{U} = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k\}$.

a) $\mathcal{U}$ har 11 element. Antalet delmängder till $\mathcal{U}$ som innehåller elementen a, b och d kan fås genom att räkna på hur många sätt vi kan säga ja eller nej till övriga åtta element. Med 8 val och 2 möjligheter i vardera val (ja eller nej) får vi enligt multiplikationsprincipen $2^8 = 256$ olika delmängder där a, b och d är med.

b) Med $A = \{a,b,c,d\}$ och $A \subseteq B \subseteq \mathcal{U}$, måste B innehålla minst de element som A innehåller, alltså fyra stycken, och som mest kan B innehålla alla 11 elementen som $\mathcal{U}$ innehåller.

c) Att $A = C \cap D$ ger oss venndiagrammet överst till höger. Vi noterar att elementen a, b, c och d är de enda som mängderna har gemensamma. $D \setminus A = \{g,h,i\}$ innebär då att dessa element ligger bara i D, d v s området längst till höger i venndiagrammet (se bild 2). Att $A = C \cap D$ innebär också att $A \subseteq C$ så $A \cup C = C$ vilket ger att det tredje sambandet $(A \cup C) \setminus D = C \setminus D = \{j,k\}$. j och k är alltså de element som bara tillhör C, d v s området längst till vänster i venndiagrammet. Vi har därmed $C = \{a,b,c,d,j,k\}$ och $D = \{a,b,c,d,g,h,i\}$.



Svar: a) Det finns $2^8 = 256$ delmängder till $\mathcal{U}$ som innehåller a, b och d.
b) B har minst 4 element ($= A$) och som mest 11 element ($= \mathcal{U}$).
c) $C = \{a,b,c,d,j,k\}$ och $D = \{a,b,c,d,g,h,i\}$

4. Vi formulerar följande satser: p: det regnar och q: gräset växer.

De båda utsagorna blir då på satslogisk form:

1) Om det regnar så växer gräset: $p \to q$

2) Det regnar inte eller så växer gräset: $\neg p \vee q$

$p \to q \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee q$ enligt implikationslagen, så dessa utsagor är alltså logiskt ekvivalenta. Vi kan också visa detta med en sanningsvärdestabell:

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Vi ser i 3:e och 5:e kolumnen att sanningsvärdestabellen för de båda utsagorna är lika på alla rader och därmed är uttrycken logiskt ekvivalenta. Då uttrycken är logiskt ekvivalenta så implicera båda logiskt varandra.

Kolumnerna för $p \to q$ respektive $\neg p \vee q$ innehåller både 1:or och 0:or, så uttrycken är varken tautologier (sanna på alla rader) eller kontradiktioner (falska på alla rader).

Svar: Se ovan.

5. Bland 12 studenter ska fyra väljas ut som lag till tävlingen pepparkaksbuset. En av de fyra ska dessutom utses till lagledare. Peter och Elin, som är två av de 12, har som krav att om en av dem väljs ska båda vara med i laget med Elin som lagledare. På hur många sätt kan man bilda lag bland de 12 studenterna om Peter och Elins önskemål ska tillgodoses?

Beroende på om Peter och Elin är med i laget eller ej så får vi olika antal möjligheter att välja personer och lagledare. Vi delar därför upp problemet i följande två fall:

1) Peter och Elin med i laget.

I detta fall är Elin lagledare och Peter en av de tre övriga. Ytterligare två lagmedlemmar kan väljas på $\binom{10}{2} = \dfrac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$ sätt, så med Peter och Elin med i laget finns det 45 olika sätt att bilda laget på.

2) Peter och Elin **ej** med i laget.

Då finns det 10 personer att bilda laget ur. Lagledaren kan väljas på 10 sätt. De övriga 3 lagmedlemmarna kan då väljas på $\binom{9}{3} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ sätt.

Totalt finns då i fall 2, enligt multiplikationsprincipen, $10 \cdot 84 = 840$ sätt att bilda laget på.

Sammanlagt fås då $45 + 840 = 885$ olika sätt att bilda laget på enligt givna önskemål.

Svar: Det finns 885 olika sätt att bilda laget på när Peter och Elins önskemål uppfylls.

6. a) $p \wedge q \to r$ är falsk. Implikationen är endast falsk då $p \wedge q$ är sann och r falsk. $p \wedge q$ är sann bara då både p och q är sanna.
Vi har alltså p: sann, q: sann, r: falsk.

   i. $\neg p \vee r$ blir då **falsk**, eftersom både $\neg p$ och r är falska.

Var god vänd

ii. $p \wedge r \to q$ blir **sann**, ty r falsk ger $p \wedge r$ falsk och då är implikationen sann, oavsett värdet på q (som är sann i detta fall).

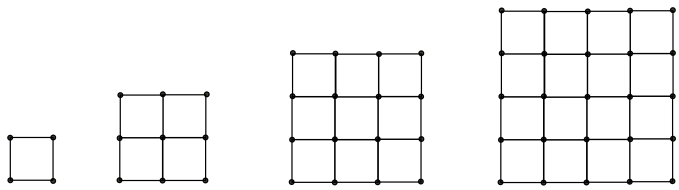
b) Slutledningen $\neg r \wedge (p \vee q \to r) \quad \Rightarrow \quad \neg q$ är korrekt och det kan visas med sanningsvärdestabell, reduktion eller deduktion. Vi väljer att visa det med deduktion, då det blir kortast här:

1.)	$\neg r$	Förutsättning
2.)	$p \vee q \to r$	Förutsättning
3.)	$\neg(p \vee q)$	1.), 2.) och Modus tollens.
4.)	$\neg p \wedge \neg q$	3.) och De morgans lag
5.)	$\neg q$	4.) och Konjunktiv förenkling.

Vi har härlett slutsatsen $\neg q$ ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: a) i. $\neg p \vee r$ är falsk, ii. $p \wedge r \to q$ är sann
b) Slutledningen är korrekt.

7. Tändstickor läggs i figurer så att allt fler kvadrater bildas som bilden nedan visar. Vi ska ange ett uttryck för det antal stickor som behövs för att lägga den n-te figuren samt hur många stickor som behövs i den 99:e figuren.



	1.	2.	3.	4.
Antal stickor:	4	12	24	40
Faktoriserat:	$1 \cdot 4$	$2 \cdot 6$	$3 \cdot 8$	$4 \cdot 10$

Vi räknar antalet stickor och får i de fyra första antalen ovan. Om vi faktoriserar antalet stickor så kan vi se ett mönster i dessa faktorer. Vi får ordningsnumret på figuren gånger en faktor som växer från 4 och ökar med 2 för varje ny figur. Om vi kallar ordningsnumret på figuren för n så blir den andra faktorn $2n + 2$. Vi får:

$a_n = n \cdot (2n + 2) = 2n(n + 1), \text{ där } n = 1, 2, 3, \ldots$

I det andra steget har vi brutit ut en 2:a ur den andra faktorn.

Räknar vi antalet stickor i figur 5 så blir de 60 stycken, vilket kan skrivas som $5 \cdot 12$, vilket också stämmer med detta mönster. (Det fungerar också att faktorisera antalen som $2 \cdot 2$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 6$, $5 \cdot 8$ och få mönstret $a_n = (n + 1) \cdot 2n$ som ger samma uttryck.)

Vi kan nu beräkna antalet stickor i den 99:e figuren genom att sätta in $n = 99$ i uttrycket ovan. Vi får:

$a_{99} = 2 \cdot 99 \cdot (99 + 1) = 198 \cdot 100 = 19800$ stickor.

Svar: Antalet stickor i figur nummer n är $a_n = 2n(n + 1), \text{ där } n = 1, 2, 3, \ldots$
För att lägga den 99:e figuren går det åt 19800 stickor.