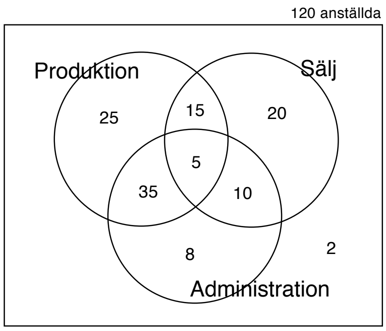
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
725G93/Diskret matematik och logik, 5 hp
2018-01-05



1. För att strukturera informationen tar vi hjälp av ett venndiagram. Med informationen i uppgiften kan vi successivt, inifrån och ut, räkna ut hur många som finns i varje område. Vi får resultatet intill. Sist kan vi summerar alla vi fått inom cirklarna och se att de är 118 st. Då de är 120 totalt i företaget är det alltså 2 personer utanför de tre cirklarna. Nu kan vi besvara frågorna:

   a) Hur många arbetar inom minst två områden?
   Det är de personer som finns där en eller två mängder överlappar varandra. Det är alltså 15+35+5+10=65 personer som arbetar inom minst två områden (och som är i särskilt fokus när man ser över organisationen).

   b) Hur många arbetar inte med någon av dessa tre områden?
   Det är de som är utanför alla tre cirklarna. Vi ser att det är 2 st som inte jobbar med någon av dessa områden.

   Svar: a) Det är 65 personer som arbetar inom minst två områden.
   b) 2 personer arbetar inte med någon av dessa tre områden.

2. Talföljden ser enligt uppgiften ut enligt ?, ?, 3, 9, 27, 81, ...

   a) Vi ser att varje nytt tal i följden är 3 gånger större än det tidigare. För att få de två första talen kan vi då dividera med 3. Vi får: $a_2 = \frac{3}{3} = 1$ och efter det fås $a_1 = \frac{1}{3}$. De två första talen i följden är alltså $\frac{1}{3}$ och 1.

   b) Då vi startar med $\frac{1}{3}$ och sedan multiplicerar med 3 för varje nytt tal kan vi ge följande genrella uttryck för talen i följden: $a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^n$, där $n = 0, 1, 2, \ldots$
   Uttrycket kan skrivas $a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^n = 3^{n-1}$, där $n = 0, 1, 2, \ldots$
   (Om n börjar 1, 2, 3... får man istället $a_n = 3^{n-2}$ efter förenkling.)

   Svar: a) De två första talen i följden är $\frac{1}{3}$ och 1.
   b) $a_n = 3^{n-1}$, där $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. a) Med $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{e,f,g\}$ och $C = \{a,c,e\}$ som mängder i $\mathcal{U} = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ fås $C^c = \{b,d,f,g\}$. Därmed är $A \cap C^c = \{b,d\}$ och vi får:

$$D = ((A \cap C^c) \cup B) \setminus A = \Big(\{b,d\} \cup \{e,f,g\}\Big) \setminus \{a,b,c,d,e\} =$$

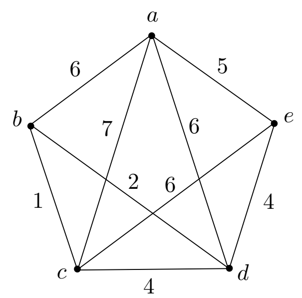
$$= \{b,d,e,f,g\} \setminus \{a,b,c,d,e\} = \{f,g\}$$

Med $D = \{f,g\}$ är alla delmängder till D: $\emptyset$, $\{f\}$, $\{g\}$, samt $\{f,g\}$.

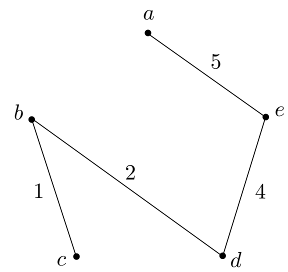
b) Då $A = \{a,b,c,d,e\}$ så finns det fem element att bilda delmängder av. Utan villkor har vi för varje element 2 möjligheter: ”med eller inte med” i delmängden. Nu är dock redan valen gjorda för b och c, då b ska vara med men inte c. Därmed återstår val för de andra tre elementen med två möjligheter i varje. Enligt multiplikationsprincipen får vi då $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ möjligheter att bilda delmängder med detta villkor.

Svar: a) $D = \{f,g\}$ och dess delmängder är $\emptyset$, $\{f\}$, $\{g\}$ och $\{f,g\}$.
b) Det finns 8 delmängder till A som innehåller b, men inte c.

4. a) Vi ser i grafen att noderna a, c och d har gradtal 4 och att noderna b och e har gradtal 3. Enligt sats 6.2 i boken finns det en sluten eulerväg precis då samtliga noder har jämna gradtal och en öppen eulerväg då precis två noder har udda gradtal. Alltså finns det inte denna graf ingen sluten eulerväg, men en öppen eulerväg då precis b och d har udda gradtal, övriga jämna. Ett exempel på en öppen eulerväg är: $b - c - d - e - a - b - d - a - c - e$.



b) I grafen ovan visas kostnaderna för respektive båge i tusentals kronor. Vi väljer att använda Kruskals algoritm och startar med noderna utan bågar. Då vi har 5 noder behövs 4 bågar, enligt satsen om träd. Vi gör nu valen enligt algoritmen:
Billigaste bågen är $b - c$ med kostnad 1, som **väljs**.
Nästa billigaste båge är $b - d$ med kostnad 2, som **väljs** då cykel ej bildas.
Nästa billigaste båge är $c - d$ med kostnad 4, som **ej väljs** då cykel bildas med de tidigare bågarna.
Nästa billigaste båge är $d - e$ med kostnad 4, som **väljs** då cykel ej bildas.
Nästa billigaste båge är $a - d$ med kostnad 5, som **väljs** då cykel ej bildas.



Då fyra bågarna nu valts har vi ett minimalt spännande träd, enligt Kruskals algoritm. Kostnaden blir $1 + 2 + 4 + 5 = 12$, alltså 12 000 kronor.

Svar:

a) Det finns en öppen eulerväg, men ej en sluten. Se exempel och motivering ovan.
b) Det billigaste nätverket kostar 12 000 kr och ser ut som ovan.

5. Studentföreningen har 9 medlemmar, varav 6 är tjejer och 3 är killar. Styrelsen ska bestå av tre personer där en ska vara ordförande, en sekreterare och en kassör.

   a) Om vi väljer posterna bland samtliga så kan ordförande väljas på 9 sätt, sekreterare på 8 sätt och kassör på 7 sätt. Multiplikationsprincipen ger totalt $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ olika sätt att välja styrelse för föreningen.

   b) Om styrelsen ska innehålla minst en kille så är det en, två eller tre killar i styrelsen. Vi kan dela upp i tre fall och räkna ut dem var för sig, men enklare här är att ta samtliga styrelser som vi har i a) och dra bort de med ”inga killar” i, det vill säga de styrelser som bara består av tjejer. I dessa kan ordförande väljas på 6 sätt, sekreterare på 5 sätt och kassör på 4 sätt. Vi får då $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ olika styrelser som bara består av tjejer, enligt multiplikationsprincipen. Antalet som innehåller minst en kille är då: $504 - 120 = 384$ stycken.

Svar: a) Det finns 504 olika sätt att utse styrelse.
b) Det finns 384 styrelser av dessa som innehåller minst en kille.

6. Avgör med någon metod i kursen huruvida följande slutledning är logiskt korrekt:

$$(p \to \neg r) \land (s \lor t \to \neg q) \land p \land (\neg q \to r) \;\Rightarrow\; \neg s$$

Vi kan använda sanningsvärdestabell, reduktionsmetoden eller deduktion för att visa att denna slutledningen är korrekt. Vi väljer här att redovisa lösningen med deduktion:

1.)	p	Förutsättning
2.)	$p \to \neg r$	Förutsättning
3.)	$\neg r$	1.), 2.) och Modus Ponens.
4.)	$\neg q \to r$	Förutsättning
5.)	$\neg(\neg q)$	3.), 4.) och Modus Tollens.
6.)	$s \lor t \to \neg q$	Förutsättning
7.)	$\neg(s \lor t)$	5.), 6.) och Modus Tollens.
8.)	$\neg s \land \neg t$	7.) och De Morgans lag.
9.)	$\neg s$	8.) och Konjunktiv förenkling.

Vi har härlett slutsatsen $\neg s$ ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: Slutledningen är korrekt. Se härledning ovan.

7. För alla träd gäller $N = B + 1$, enligt sats 6.3 där N är antalet noder och B är antalet bågar. I uppgift finns information om noder och gradtal och vi får att $N = 18 + 2 + m + n$, alltså att $N = 20 + m + n$. (1.)

Enligt handskakningslemmat är antalet bågar B summan av gradtalen delat med 2. Vi använder informationen i uppgiften och får:

$$B = \frac{\text{Summa gradtal}}{2} = \frac{18 \cdot 1 + 2 \cdot 8 + m \cdot 3 + n \cdot 4}{2} = \frac{34 + 3m + 4n}{2} \quad (2.)$$

Med uttrycket (1.) för N och uttrycket (2.) för B insatt i sambandet för träd ovan får vi:

var god vänd

$N = B + 1 \Leftrightarrow 20 + m + n = \dfrac{34 + 3m + 4n}{2} + 1$

Vi multiplicera samtliga termer med 2 och löser ut m uttryckt i n:

$40 + 2m + 2n = 34 + 3m + 4n + 2 \Leftrightarrow 4 + 2m + 2n = 3m + 4n \Leftrightarrow$

$4 = m + 2n \Leftrightarrow m = 4 - 2n.$

Då m och n är antalet noder av viss grad är de heltal som inte kan vara mindre än 0. Om $n = 0$ så blir $m = 4$, om $n = 1$ så är $m = 2$ och om $n = 2$ så är $m = 0$. Om n blir större än 2 så blir m mindre än 0, så dessa är de tre möjliga uppsättningarna på m och n.

Svar: Antalet noder av grad 3 (m) beror av antalet noder av grad 4 (n) enligt sambandet: $m = 4 - 2n$.

Möjliga lösningar för m och n är:

$m = 4$ då $n = 0$, $m = 2$ då $n = 1$ respektive $m = 0$ då $n = 2$.