

TMV142 Linjär algebra Z
Lösningar

Del 1: Godkänddelen

1. (a) \mathbf{u} är en linjärkombination av \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 om och endast om $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$ är en lösbar vektorekvation. Totalmatrisen för vektorekvationen blir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & h-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & h-5 \end{bmatrix},$$

och det svarar mot ett lösbar ekvationssystem om och endast om $h - 5 = 0$, dvs, om och endast om $h = 5$.

SVAR: \mathbf{u} är en linjärkombination av \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 om och endast om $h = 5$.

- (b) Totalmatrisen som svarar mot ekvationssystemet är:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Den sista matrisen är i trappstegsform, och andra kolonnen är då den enda kolonnen som inte är en pivotkolonn, och svarar alltså då mot en fria variabel, som vi kan kalla för t .

Vi får då att allmänna lösningen blir:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -1 \end{cases}.$$

SVAR: Allmänna lösningen är: $x_1 = 10 - 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

- (c) Volymen av parallelepipedet som spänns upp av \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 och \mathbf{v}_3 ges av $\det(A)$ där $A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$.

Eftersom att dra ifrån två gånger tredje raden från den andra raden inte påverkar determinanten, så får vi:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \{ \text{utveckling längs första kolonnen} \} \\ &= 5 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (5 - 12) = -35. \end{aligned}$$

SVAR: Volymen är $|\det(A)| = 35$.

(d) Vi får med hjälp av basbytesmatriser att

$$\mathbf{v} = P_B(\mathbf{v})_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sedan uppfyller $(\mathbf{v})_C$ att $P_C(\mathbf{v})_C = \mathbf{v}$, och motsvarande totalmatris är:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

så $(\mathbf{v})_C = [2 \quad -3]^t$.

SVAR:

$$(\mathbf{v})_C = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(e) Multiplicerar vi ekvationen med B från höger, så får vi

$$2A + X = B$$

och drar vi ifrån $2A$ får vi då:

$$X = B - 2A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

SVAR:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(f) Vi söker en egenvektor hörande till egenvärdet $\lambda = 1$, alltså en vektor i nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 0.55 - 1 & 0.35 \\ 0.45 & 0.65 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.45 & 0.35 \\ 0.45 & -0.35 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser direkt att $\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ är en egenvektor, och därmed är steady-state vektorn $\begin{bmatrix} 7/16 \\ 9/16 \end{bmatrix}$.

SVAR: $[7/16 \quad 9/16]^T$

2. Vi börjar med att ta fram reducerade trappstegsformen för A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Eftersom 1:a, 2:a och 5:e kolonnerna är pivotkolonner, så bildar motsvarande kolonner i A en bas för $\text{Col } A$.

SVAR: Vektorerna

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

bildar en bas för $\text{Col } A$.

- (b) Från trappstegsformen ovan, så ser man att x_3 och x_4 blir fria variabler (säg, s och t) i ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, och att den allmänna lösningen till ekvationen är:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9s + 3t \\ 5s - 7t \\ s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Enligt metoden för att ta fram en bas för $\text{Nul } A$, blir då vektorerna som står efter s och t en bas för $\text{Nul } A$.

SVAR: Vektorerna

$$\left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

bildar en bas för $\text{Nul } A$.

- (c) Vi ser från (a) och (b) att $\text{Col } A$ respektive $\text{Nul } A$ har baser som består av 3 respektive 2 element, så $\text{rank } A = \dim \text{Col } A = 3$ och $\dim \text{Nul } A = 2$.

SVAR: $\text{rank } A = 3$ och $\dim \text{Nul } A = 2$.

3. Ett sätt att se det är att en linjär avbildning S skall uppfylla att $S(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, eftersom $S(\mathbf{0}) = S(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot S(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, medan T uppfyller $T(\mathbf{0}) = \mathbf{t} \neq \mathbf{0}$.

Att T inte är linjär kan också ses mer direkt, t.ex.

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{t} \neq \mathbf{x} + \mathbf{t} + \mathbf{y} + \mathbf{t} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}),$$

eller om $c \neq 1$,

$$T(c\mathbf{x}) = c\mathbf{x} + \mathbf{t} \neq c(\mathbf{x} + \mathbf{t}) = cT(\mathbf{x}).$$

4. (a) Det karakteristiska polynomet p är:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & -1 \\ -9 & 4 - \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \{ \text{utveckling längs 3:e raden} \} = \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -9 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Egenvärdena är rötterna till det karakteristiska polynomet, dvs, $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$.

SVAR: Egenvärdena till A är 1 och 2.

- (b) Vi får fram egenvektorer till ett egenvärde λ genom att bestämma $\text{Nul}(A - \lambda I)$. För $\lambda = 1$ får vi:

$$[(A - I) \quad 0] = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ -9 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom andra kolonnen inte är en pivotkolonn svarar den mot en fri variabel (som vi låter vara $3t$) i ekvationen $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, och vi får att allmänna lösningen till ekvationen blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 3t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

För $\lambda = 2$ får vi:

$$[(A - 2I) \quad 0] = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ -9 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

Eftersom tredje kolonnen inte är en pivotkolonn svarar den mot en fri variabel (som vi låter vara t) i ekvationen $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, och vi får att allmänna lösningen till ekvationen blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

SVAR: Eigenvektorer för A med egenvärde $\lambda = 1$ är alla vektorer

$$t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0,$$

och egenvektorer för A med egenvärde $\lambda = 2$ är alla vektorer

$$t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0.$$

- (c) Enligt (b), så kan man bara hitta två linjärt oberoende egenvektorer till A (valfri nollskild multipel av $[1 \ 3 \ 0]^t$, och valfri nollskild multipel av $[0 \ 1 \ 1]^t$), men för att A skall vara diagonaliserbar skall det finnas tre stycken linjärt oberoende egenvektorer, så A är alltså inte diagonaliserbar.

SVAR: A är inte diagonaliserbar.

5. (a) Om A är en $m \times n$ -matris, och $b \in \mathbb{R}^m$, så är en *minstakvadratlösning* till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ sådan att $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- (b) Vi måste hitta minstakvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(Här tolkar vi alltså x_1 som β_0 i modellen och x_2 som β_1 .) Vi måste lösa normalekvationerna

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

Det gäller att

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Således ges normalekvationernas utökade koefficientmatris av

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \end{array} \right],$$

så den sökta linjen har ekvationen $y = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}x$.

SVAR: Linjen som är bäst anpassat till värdena enligt minstakvadratmetoden är $p(x) = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}x$.

- (c) Vi har

$$\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \dots = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix},$$

så $\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\| = \frac{1}{5} \sqrt{7^2 + 6^2 + 9^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{230}}{5}$.

SVAR: $\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\| = \frac{\sqrt{230}}{5}$.

Del 2: Överbetygsdelen

6. (a) Projektionen \mathbf{p} av en vektor \mathbf{w} på linjen L som spänns upp av \mathbf{v} ges av

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}.$$

Vi får då att projektionerna blir:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{\sqrt{3} + 0}{3 + 1} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{0 + 1}{3 + 1} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

SVAR: Projektionerna \mathbf{p}_1 och \mathbf{p}_2 av \mathbf{e}_1 och \mathbf{e}_2 på L är:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

- (b) Speglingarna blir enligt formeln $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - \mathbf{w}$:

$$\mathbf{s}_1 = 2\mathbf{p}_1 - \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{s}_2 = 2\mathbf{p}_2 - \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

SVAR: \mathbf{e}_1 speglas till $\mathbf{s}_1 = [1/2 \quad \sqrt{3}/2]^t$ och \mathbf{e}_2 speglas till $\mathbf{s}_2 = [\sqrt{3}/2 \quad -1/2]^t$.

(c) Standardmatrisen för en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är matrisen

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2)].$$

Vi skall alltså då ta fram vad \mathbf{e}_1 och \mathbf{e}_2 avbildas på under T .

Speglingen av en vektor $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2]^t$ i x -axeln är $[v_1 \quad -v_2]^t$.

Speglar vi \mathbf{e}_1 i L , så får vi enligt (b) att den går på $\mathbf{s}_1 = [1/2 \quad \sqrt{3}/2]^t$, och speglar vi sedan \mathbf{s}_1 i x -axeln går den då på $\mathbf{t}_1 = [1/2 \quad -\sqrt{3}/2]^t$, och vi får att $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{t}_1$.

Speglar vi \mathbf{e}_2 i L , så får vi enligt (b) att den går på $\mathbf{s}_2 = [\sqrt{3}/2 \quad -1/2]^t$, och speglar vi sedan \mathbf{s}_2 i x -axeln går den då på $\mathbf{t}_2 = [\sqrt{3}/2 \quad 1/2]^t$, och vi får att $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{t}_2$.

Så standardmatrisen för T är

$$A = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2] = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

SVAR: Standardmatrisen för T är:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(d) Matrisen för rotation i \mathbb{R}^2 med θ radianer moturs är:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

så om vi låter $\theta = -\pi/3$, så blir $R = A$, där A är standardmatrisen för T från (c).

SVAR: T är rotation med $-\pi/3$ radianer moturs.

7. (a) Med hjälp av produktformeln för determinanter $\det(CD) = \det(C)\det(D)$, och att $\det(I_n) = 1$, där I_n är enhetsmatrisen, så får man att $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$. Dessutom gäller produktformeln för fler än två matriser, och vi får då att

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B^{-1}) = \det(B)\det(A)(1/\det(B)) = \det(A).$$

Så påståendet är Sant.

- (b) Enligt satsen om inverterbara matriser, så har en 3×3 -matris A linjärt oberoende kolonner (e.) om och endast om den är inverterbar (a.). Igen, enligt satsen om inverterbara matriser, så är A inverterbar (a.) om och endast A^t är inverterbar (l.). Använder vi då satsen om inverterbara matriser på A^t , så får vi då att A^t är inverterbar om och endast om A^t har linjärt oberoende kolonner. Men eftersom kolonnerna till A^t är (transponatet av) raderna till A , så får vi då att kolonnerna till A är linjärt oberoende om och endast om raderna till A är linjärt oberoende. Så påståendet är Sant.

- (c) En 3×2 -matris kan aldrig ha linjärt oberoende rader, eftersom de då bildar 3 stycken vektorer i \mathbb{R}^2 . Så vilken 3×2 -matris med linjärt oberoende kolonner ger ett motexempel till påståendet. Till exempel kan vi ta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

där kolonnerna är linjärt oberoende, men inte raderna.

8. (a) Se Lay, avsnitt 6.2.
(b) Se Lay, Sats 6.2.4.