MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 120112 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Emil Gustavsson
0703 088 304

TMV140 Linjär algebra Z

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2011 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar kommer att läggas ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok cirka tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Lös för X matrisekvationen (3p)

$$AXB = C + AX,$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm 3×3-matrisen A som satisfierar $A\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i,\ i = 1, 2, 3$, där (3p)

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{[1\ 0\ 0]^T, [-1\ 1\ 2]^T, [-2\ 1\ 3]^T\}$$

och

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \{[1\ 1\ 1]^T, [-1\ 2\ 1]^T, [2\ -1\ 4]^T\}.$$

3. (a) Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådan att $A = PDP^{-1}$, där (5p)

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Skriv ner den kvadratiska formen $Q(x, y)$ vars matris är A ovan, och ange huruvida f är positivt-, negativt- eller indefinit. (1p)

4. (a) Förklara vad som menas med att säga att vektorerna $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ utgör en *ortonormerad bas* för ett underrum U i $\mathbb{R}^n$. (2p)
(Obs! Du ska förklara båda orden !).

(b) Bestäm en ortonormerad bas för underrummet U i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna (4p)

$$\mathbf{v}_1 = [1\ 2\ 0\ 3]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [4\ 0\ 5\ 8]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [8\ 1\ 5\ 6]^T.$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Låt $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ vara en bas för ett 2-dimensionellt vektorrum V. Bevisa att $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ utgör också en bas för V, där $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. (3p)

(b) För vilket värde av $a \in \mathbb{R}$ utgör INTE de tre polynomen $f(x) = x^2 + ax - 1$, $g(x) = x + 3$, $h(x) = x^2 + 3x + 2$ en bas för $\mathbb{P}_2$? (3p)

6. (a) Bestäm matrisen för spegling i planet $6x + 3y - 2z = 0$. (4p)

(b) Bestäm spegelbilden av punkten $(2, 3, 4)$ i planet $6x + 3y - 2z = 1$. (2p)

7. (a) 3×3-matrisen A har följande egenvärden och egenvektorer : (3p)

$$\lambda_1 = 10, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm nu egenvärdena och egenvektorer för matrisen $B = XAX^{-1}$, där

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

(b) Bevisa att egenvektorer tillhörande olika egenvärden till en symmetrisk matris A är ortogonala. (3p)

Lycka till!
Peter H

Anonym kod	TMV140 Linjär algebra Z 120112	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm determinanten av matrisen AB där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Den linjära avbildningen $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ avbildar $[1\ 0]^T$ på $[2\ 3]^T$ och avbildar $[1\ 1]^T$ på $[3\ \ -2]^T$. Ange standardmatrisen för T. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt (3p)

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Bestäm basbytematrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, samt koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$, där $\mathbf{x} = [7\ 11]^T$.

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) Bestäm rangen av, samt baser till rad-, kolonn- och nollrummen till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm den linje som, i minstakvadratmetodens mening, bäst anpassar till punkterna (3p)

$$(1,1),\ (2,4),\ (3,2),\ (4,4).$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMV140, Linjär Algebra Z, 120112

1. (a) Observe that $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. The matrix B is triangular, so $\det B = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$. The determinant of A is most easily computed via a cofactor expansion along the second column. We find that $\det A = -(-3)(5-12) = -21$. Hence $\det(AB) = (-21)(24) = -504$.

(b) It's given that

$$T(\mathbf{e}_1) = [2\ 3]^T, \quad T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = [3\ -2]^T.$$

Hence

$$T(\mathbf{e}_2) = T((\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_1) = T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_1) = [1\ -5]^T.$$

Thus the standard matrix for T is the matrix

$$\begin{bmatrix} | & | \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

(c) We have that

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2]^{-1}[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Note that $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, hence $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [1\ 1]^T$. Consequently,

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

(d) After the row operations

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_2,$$

one obtains the echelon form

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hence $\text{rank}(A) = 2$ and

$$\begin{aligned} \text{Row}(A) &= \text{Span}\{[1\ 2\ 3\ 4]^T, [0\ 1\ -1\ 2]^T\}, \\ \text{Col}(A) &= \text{Span}\{[1\ -1\ 3]^T, [2\ -1\ 4]^T\}. \end{aligned}$$

To obtain a basis for the nullspace, we continue with back-substitution. The variables x_3 and x_4 are free, and we obtain in turn

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 - 2x_4, \\ x_1 &= -2(x_3 - 2x_4) - 3x_3 - 4x_4 = -5x_3. \end{aligned}$$

Hence the nullspace consists of all vectors such that

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_3 \\ x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Thus,

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\{[-5\ 1\ 1\ 0]^T, [0\ -2\ 0\ 1]^T\}.$$

(e) The best-fit line has equation $y = kx + m$ where

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$$

and

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

The remaining computations are standard, and it turns out that the best-fit line is $y = \frac{7}{10}x + 1$.

2. (a)

$$AXB = C + AX \Rightarrow AXB - AX = C = AX(B - I_2) \Rightarrow X = A^{-1}C(B - I_2)^{-1}.$$

We have

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B - I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (B - I_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hence, finally,

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -28 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

(b) In matrix form we have

$$A[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3],$$

hence

$$A = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3][\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

The inverse can be computed by reducing the augmented matrix $[..|I_3]$ to $[I_3|(..)^{-1}]$. One may verify that this is accomplished by the sequence of row operations

$$R_3 \mapsto R_3 - 2R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 + R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 + R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - R_3,$$

and that the inverse is the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hence,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Vi måste diagonalisera A. Dess karakteristiska ekvation lyder

$$(-6-\lambda)(1-\lambda)-12^2=0 \Rightarrow \lambda^2+5\lambda-150=0,$$

som har de två rötterna $\lambda_1=-15$, $\lambda_2=10$. Näst hittar vi motsvarande egenvektorer.

$\lambda_1=-15$: Vi har

$$A+15I_2=\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser tydligt att en egenvektor är $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2=10$: Vi har

$$A-10I_2=\begin{bmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser tydligt att en egenvektor är $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Då har vi att $A=PDP^{-1}$ där

$$P=[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$
$$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

(b) Den kvadratiska formen $Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ har matris $\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$. I det aktuella fallet är alltså $Q(x,y)=-6x^2+24xy+y^2$. Eftersom egenvärdena har olika tecken så är formen indefinit.

4. (a) That $\{\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k\}$ forms an orthornormal basis for U means that the following two conditions are satisfied :

(i) the vectors span U, i.e.: for each $\mathbf{v}\in U$, there exist real numbers $c_1,...,c_k$ such that

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{u}_i=\mathbf{v}.$$

(ii) the vectors are pairwise orthogonal and each has length one, i.e.:

$$\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j=\begin{cases} 0, & \text{if } i\neq j, \\ 1, & \text{if } i=j. \end{cases}$$

(b) We first replace $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ by an orthogonal basis $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\}$ via the Gram-Schmidt procedure. We have $\mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1$. Next,

$$\mathbf{w}_2=\mathbf{v}_2-\left(\frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1$$
$$=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}-\frac{28}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Thirdly,

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right) \mathbf{w}_1 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\right) \mathbf{w}_2$$
$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{28}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{49}{49} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

It now remains to normalise the basis. We choose

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{||\mathbf{w}_1||} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{||\mathbf{w}_2||} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{||\mathbf{w}_3||} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

and then $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ is an orthonormal basis for U.

5. (a) There are different ways to argue this. For example, let $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ and $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Then $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. The fact that this matrix is invertible (its determinant is -2) implies that $\mathcal{C}$ is also a basis for the vector space.

(b) We can identify $\mathbb{P}_2$ with $\mathbb{R}^3$ in the usual manner, and then we are seeking the value of a for which the coordinate matrix

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

is not invertible. The determinant of this matrix can be computed as $6 - 3a$, which equals zero when $a = 2$. Hence this is the value of a for which $\{f, g, h\}$ is not a basis for $\mathbb{P}_2$.

6. (a) For a plane passing through the origin, we have the general formula

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \cdot \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\right) \mathbf{n}. \tag{1}$$

Here $\mathbf{x}$ denotes an arbitrary point in $\mathbb{R}^3$, $s(\mathbf{x})$ denotes its mirror image in the plane, and $\mathbf{n}$ is a normal to the plane. In the present case, we can take $\mathbf{n} = [6\ 3\ -2]^T$. The columns of the reflection matrix are formed by the vectors $s(\mathbf{e}_1), s(\mathbf{e}_2), s(\mathbf{e}_3)$. These are computed by plugging into (1). We omit the details of these computations and just present the answer : the matrix is

$$\frac{1}{49} \begin{bmatrix} -23 & -36 & 24 \\ -36 & 31 & 12 \\ 24 & 12 & 41 \end{bmatrix}.$$

(b) The difference here is that the plane does not pass through the origin, so we need to modify formula (1) slightly. If $\mathbf{x}_0$ denotes any point in the plane, then the reflection formula in general reads

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \cdot \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \right) \mathbf{n}. \tag{2}$$

In our case, $\mathbf{n} = [6\ 3\ -2]$ as before, and this time $\mathbf{x} = [2\ 3\ 4]^T$. One sees directly that, for example, the point $(1, -1, 1)$ lies in the plane and hence we may choose $\mathbf{x}_0 = [1\ -1\ 1]^T$. Plugging everything into (2), we find that

$$s\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} -46 \\ 75 \\ 244 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Similar matrices have the same eigenvalues. One can also verify that if $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, then $B(X\mathbf{v}) = \lambda(X\mathbf{v})$. Hence, the eigenvalues and eigenvectors of B are given by

$$\lambda_1 = 10, \quad \mathbf{w}_1 = X\mathbf{v}_1 = ... = \begin{bmatrix} 24 \\ 39 \\ 54 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \mathbf{w}_2 = X\mathbf{v}_2 = ... = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = X\mathbf{v}_3 = ... = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

(b) Theorem 7.1.1 in the book.