MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Datum: 110822 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Dawan Mustafa
0703 088 304

TMV140 Linjär algebra Z

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2011 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar kommer att läggas ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok cirka tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Bestäm skalären p i matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & p \end{bmatrix}$$

så att den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning.

(b) Lös för $p = 6$ i matrisen A med hjälp av Cramers regel x_2 ur ekvationssystemet (3p)

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Matrisen A har egenvektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

med egenvärden 1 respektive 2.

(a) Visa att A är diagonaliserbar. (2p)

(b) Bestäm A. (4p)

4. Finn för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & -5 \\ -2 & -4 & -1 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) en bas för kolonnrummet $\operatorname{Col} A$, (2p)

(b) en bas för nollrummet $\operatorname{Nul} A$, (2p)

(c) en ortogonalbas för $\operatorname{Col} A$. (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Visa att $\mathcal{B} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ är en bas för rummet av alla polynom av grad högst 2. (3p)

(b) Finn koordinaterna för polynomet $p(x) = 1 - 2x - x^2$ i denna bas. (3p)

6. Visa att varje mängd $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ av $p > n$ vektorer är linjärt beroende. (6p)

7. Finn alla $n \times n-$matriser A med rang n sådana att $A^2 = A$. (6p)

Lycka till!
Peter H

Anonym kod	TMV140 Linjär algebra Z 110822	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna determinanten (3p)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Den linjära avbildningen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ uppfyller (2p)

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ange standardmatrisen för T.

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt (3p)

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Visa att vektorerna $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{v}$ i denna bas.

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) Bestäm LU-faktoriseringen av matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 13 & 19 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Finn minstakvadratlösningen till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMV140, Linjär Algebra Z, 110822

1. (a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3,$$

där den sista determinanten beräknas med Sarrus regel eller med ytterligare radoperationer.

(b) Vi kan direkt skriva upp matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) Upprepade radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Speciellt är

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

radekvivalent med enhetsmatrisen, så de tre första vektorerna bildar en bas. Vi kan då läsa av koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [21 \; -6 \; 2]^T$.

(d) Vi har

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 13 & 19 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

På vanligt sätt kan vi läsa av faktoriseringen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(e) Vi har

$$A^TA = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}, \qquad (A^TA)^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen ges alltså av

$$(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 7/15 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Upprepade radoperationer ger

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & p-5 \end{bmatrix}.$$

Att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning är ekvivalent med att det inte finns pivotelement i varje rad. Vi ser att detta gäller endast för $p = 5$.

(b) Vi har

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{8}{1} = 8$$

(där determinanterna kan beräknas med Sarrus regel).

3. (a) En 2×2-matris med två olika egenvärden är alltid diagonaliserbar.

(b) Vi har $A = TDT^{-1}$, med $T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right]$, $D = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Vi beräknar $T^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ och slutligen $A = \left[\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

4. Upprepade radoperationer ger

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Första och tredje kolonnen är pivotkolonner, så $\mathbf{u} = [1\ 1\ -2]^T$ och $\mathbf{v} = [2\ 3\ -1]^T$ är bas för kolonnrummet.

(b) Vi läser av att

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De tre vektorerna i högerledet bildar en bas för nollrummet.

(c) Med $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som i del (a) har vi

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Alltså bildar $\mathbf{u}$ och $[5\ 11\ 8]^T$ en ortogonal bas för kolonnrummet.

5. Vi övergår till basen $1, x, x^2$. Frågan är då om $[1\ 1\ 0]^T$, $[0\ 1\ 1]^T$ och $[1\ 0\ 1]^T$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$, och vilka i så fall koordinaterna för $[1\ -2\ -1]^T$ är. Detta är samma typ av uppgift som 1(c). Vi har

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Som i uppgift 1(c) ser vi att vektorerna bildar en bas och att den sökta koordinatvektorn är $[0\ -2\ 1]^T$.

6. Se kursboken.

7. Villkoret att A har rang n är ekvivalent med att A är inverterbar. Multiplicerar vi ekvationen $A^2 = A$ med A^{-1} får vi $A = I$. Svaret är alltså enbart enhetsmatrisen.